Corrigé détaillé de l'examen

Professeur responsable : Christophe ANCEY

Problème 1

Le fonctionnement de la clepsydre de Ctésibios est montré par l'animation du site Deconstructed auquel le lecteur est référé. Le problème est une libre inspiration de cette vidéo.

Question (1)

Au repos, l'eau n'exerce aucune force de frottement sur les parois, donc :

$$\tau = 0.$$

Notons d'ailleurs que ce résultat est vrai aussi bien pour un fluide newtonien que parfait. L'eau au repos n'exerce aucune contrainte de frottement, seulement des pressions normales aux parois.

Question (2)

La somme des forces sur le volume de contrôle est nulle. Ces forces comprennent :

- les forces de pression de part et d'autre des facettes du volume de contrôle ;
- le poids du volume de contrôle.

Écrivons le bilan de ces forces en les projetant sur l'axe vertical Oz orienté vers le haut :

$$-\varrho g \pi R^2 \mathrm{d}z + \pi R^2 \sigma(z) \mathrm{d}z - \pi R^2 \sigma(z + \mathrm{d}z) \mathrm{d}z = 0.$$

En divisant par $\mathrm{d}z$ et πR^2, puis en posant $\sigma(z+\mathrm{d}z) = \sigma(z)+\sigma'(z)\mathrm{d}z+O\left((\mathrm{d}z)^2\right)$, et enfin en prenant la limite $\mathrm{d}z \to 0$, on retrouve l'équation de Pascal :

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}z} = -\varrho g.$$

L'intégration de cette équation en prenant une pression nulle au niveau de la surface libre conduit à la forme hydrostatique :

$$\sigma(z) = \varrho g(h-z).$$

Question (3)

Écrivons le bilan de ces forces en prenant en compte le frottement pariétal :

$$-\varrho g\pi R^2\mathrm{d}z + \pi R^2\sigma(z)\mathrm{d}z - \pi R^2\sigma(z+\mathrm{d}z) + 2\pi R\mu\sigma\mathrm{d}z = 0.$$

On en déduit l'équation différentielle demandée

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}z} = 2\mu\frac{\sigma}{R} - \varrho g,$$

avec pour condition aux limites $\sigma(z=h_0) = 0$. La solution est

$$\sigma = \frac{g\rho R}{2\mu}\left(1 - e^{-\dfrac{2\mu(h_0-z)}{R}}\right). \tag{1}$$

Comme la fonction exponentielle $\exp(-x)$ tend rapidement vers 0, on en déduit que la pression tend vers la constante :

$$\sigma \to \frac{g\rho R}{2\mu} \text{ pour } h_0/R \text{ suffisamment grand.}$$

Ce résultat est appelé *loi de Janssen* (1895).

Dans la limite $h_0 \gg R$, la pression au fond une constante indépendante de h_0 :

$$\sigma(0) = \frac{g\rho R}{2\mu},$$

et cette approximation est valable pour la plupart des réservoirs. Ainsi pour $h_0 > \frac{5}{2}R$, le terme exponentiel dans l'équation (1) est plus petit que 7×10^{-3}.

La loi de Janssen montre que dans un milieu granulaire contenu dans un réservoir suffisamment haut, les efforts normaux de pression sont repris par le frottement aux parois. Il y a donc saturation de la valeur de la pression alors que pour un fluide newtonien ou parfait, la pression croît linéairement avec la profondeur.

Question (4)

Comme la pression devient indépendante de la hauteur h_0, on déduit que le débit au niveau de l'orifice ne dépend pas de h_0. Les seules variables fournies dans l'énoncé sont donc : ϱ, g, r et R. On pourrait ajouter le diamètre d des grains comme variable supplémentaire. Comme le débit Q dépend nécessairement de la section de l'orifice πr^2 et que la vitesse débitante v à travers l'orifice ne peut dépendre que g, r, et R, le candidat le plus naturel pour l'ordre de grandeur de la vitesse est $v \propto \sqrt{gr}$, car il se forme une voûte granulaire au niveau de l'orifice dont le rayon est r et la vitesse de chute libre est de l'ordre de $\sqrt{gr}$. Il est peu probable que le rayon R du réservoir joue un rôle significatif. De même, intuitivement, l'hypothèse d'une vitesse débitante $v \propto \sqrt{gd}$ n'est étayée par aucun élément. On considère donc que la forme la plus raisonnable est :

$$Q \propto \pi r^2 v \Rightarrow Q \propto \sqrt{gr^5}. \tag{2}$$

Note : les expériences de Beverloo (1961) ont montré que

$$Q = C\sqrt{g(r-r_0)^5}$$

avec C une constante proche de 0,5 et r_0 une autre constante voisine du rayon moyen d'une particule. Ces résultats valident la forme (2) donnée par l'analyse dimensionnelle.

Question (5)

Il s'agit de redémontrer la formule de Torricelli vue en cours. On prend une ligne de courant entre un point A à la surface libre et un point B dans le jet juste à la sortie du réservoir. Le théorème de Bernoulli nous dit que la charge se conserve le long de cette ligne de courant est donc :

$$p_a + \frac{u_a^2}{2g} + z_a = p_b + \frac{u_b^2}{2g} + z_b,$$

soit compte tenu de la géométrie ($z_a = h_0$, $z_b = 0$ et pression dans le jet égale à la pression atmosphérique) et de l'hypothèse usuelle tirée de la conservation de la masse :

$$u_a = \left(\frac{r}{R}\right)^2 u_b \Rightarrow u_a \ll u_b,$$

l'équation de conservation de la charge est considérablement simplifiée :

$$h_0 = \frac{u_b^2}{2g},$$

d'où l'on tire la vitesse débitante :

$$u_b = \sqrt{2gh_0},$$

et le débit :

$$Q = \pi r^2 \sqrt{2gh_0}. \tag{3}$$

Question (6)

Si on considère un volume de contrôle ouvert constitué du réservoir, le volume de fluide $V(t) = \pi R^2 h(t)$ satisfait l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -Q,$$

avec Q donné par l'équation de Torricelli (3). On en déduit l'équation différentielle pour h :

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -\left(\frac{r}{R}\right)^2 \sqrt{2gh},$$

soit encore

$$\frac{\mathrm{d}h}{\sqrt{h}} = -\left(\frac{r}{R}\right)^2 \sqrt{2g}\mathrm{d}t,$$

dont l'intégrale est

$$-2\sqrt{h} = \left(\frac{r}{R}\right)^2 \sqrt{2g}(t+c),$$

avec c une constante d'intégration. Pour $t = 0$, on a $h = h_0$, et donc

$$2\sqrt{h_0} - 2\sqrt{h} = \sqrt{2g}t.$$

La hauteur est nulle pour le temps

$$t = \sqrt{\frac{2h_0}{g}} \left(\frac{R}{r}\right)^2.$$

C'est le temps de vidange du réservoir

Question (7)

Comme le débit d'un sablier est indépendant de sa hauteur, le temps pour le vider dépend linéairement du volume V_0 initialement stocké dans le réservoir. Dans le cas de la clepsydre, le débit dépend de $h^{1/2}$ et le temps de vidange $t \propto RV_0^{1/2}$ est une fonction non linéaire de V_0. Le sablier permet une mesure régulière du temps au contraire de la clepsydre.

Question (8)

On applique le principe d'Archimède en supposant que la face supérieure du flotteur est juste au niveau de la surface libre. La résultante des forces de pression est donc :

$$F = \varrho g \pi b^2 e.$$

Cette force doit contrebalancer le poids propre du flotteur et le poids de la tige, à savoir

$$P = \varrho_b g \pi b^2 e + mg.$$

La condition $F = P$ fournit l'épaisseur minimale :

$$e_{min} = \frac{mg}{(\varrho - \varrho_b) g \pi b^2}.$$

A.N. $e_{min} = 1{,}15$ cm

Question (9)

On a pour les pressions aux points A, B et C :

- pression en A : pression hydrostatique donc $p_a = \varrho g h = \varrho g z_b$;

- pression en B : pression inconnue. Attention ce n'est plus la pression atmosphérique dès que le fluide est en écoulement dans le tube ;
- pression en C : pression atmosphérique puisque C est situé à l'air libre $p_c = 0$.

On néglige la vitesse d'admission en A ($u_a = 0$) et donc le théorème de Bernoulli nous indique qu'entre les points A et C, on a :

$$\frac{p_a}{\varrho g} + \frac{u_a^2}{2g} + z_a = \frac{p_c}{\varrho g} + \frac{u_c^2}{2g} + z_c \Rightarrow u_c = \sqrt{2g(h - z_c)} = \sqrt{2g(z_b - z_c)}.$$

A.N. On a $u_c = 2{,}8$ m/s.

Le théorème de Bernoulli nous indique qu'entre les points A et B, on a :

$$\frac{p_a}{\varrho g} + \frac{u_a^2}{2g} + z_a = \frac{p_b}{\varrho g} + \frac{u_b^2}{2g} + z_b \Rightarrow p_b \Rightarrow p_b = -\varrho g \frac{u_b^c}{2g} = \varrho g(z_c - z_b),$$

car la conservation de la masse implique $u_b = u_c$. Il y a donc une dépression ($p_b < 0$), ce qui permet l'aspiration de fluide dans le siphon. Notons que l'on aurait pu également obtenir le résultat entre appliquant le théorème de Bernoulli entre B et C.

AN. On a $p_b = -3{,}9$ kPa.

Question (10)

Le volume de la clepsydre est :

$$V = \pi R^2 h,$$

soit 9,4 L. Le débit du réservoir est constant :

$$Q = \pi a^2 \sqrt{2gh_0},$$

et on veut qu'il faille dix minutes ($t = 600$ s) pour que ce réservoir remplisse la clepsydre, soit un volume débité soit égal à V :

$$\pi a^2 \sqrt{2gh_0} t = V \Rightarrow a = \sqrt{\frac{V}{\pi \sqrt{2gh_0} t}}.$$

A.N. Le rayon de l'orifice est $a = 1{,}26$ mm.

Aller plus loin

Pour ceux intéressés par la clepsydre moderne, on peut jeter un œil sur la version réalisée par Bernard Gitton.

Problème 2

Question (1)

La condition d'équilibre est

$$\varrho g R_h i = \frac{\varrho g}{K^2} \frac{Q^2}{S^2 R_h^{1/3}}, \tag{4}$$

avec

$$R_h = \frac{bh}{b+2h} \text{ et } S = bh.$$

Le débit est $Q = 12 \times 10^3$ m^3/jour, soit $Q = 139$ L/s. La résolution numérique de l'équation (4) donne la hauteur normale :

$$h_n = 46 \text{ cm}.$$

Question (2)

La vitesse est :

$$\bar{u} = \frac{Q}{bh_n} = 0{,}51 \text{ m/s},$$

et le nombre de Froude vaut pour un canal de section rectangulaire :

$$\mathrm{Fr} = \frac{\bar{u}}{\sqrt{gh_n}} = 0{,}24 < 1.$$

L'écoulement est subcritique.

Question (3)

La conservation du débit entraîne que le débit total Q doit égaler la somme des débits dans chacune des neuf conduites et comme celles-ci sont identiques, on a la relation :

$$Q = 9\pi r^2 v \Rightarrow v = \frac{Q}{9\pi r^2} = 29 \text{ cm/s}$$

La vitesse dans une conduite en l'absence de frottement est donnée par la formule de Torricelli :

$$v = \sqrt{2g(h_e + \Delta z)},$$

avec h_e la hauteur d'eau dans le réservoir de chasse et $\Delta Z = z_a - z_b = 7{,}9$ m la différence d'altitudes entre A et B. On déduit que la hauteur d'eau h_e doit vérifier :

$$h_e = \frac{v^2}{2g} - \Delta z = -7{,}9 \text{ m} < 0$$

Cela n'est évidemment pas possible. En l'absence de frottement, l'eau à la sortie du canal ne s'accumulerait pas dans le réservoir de chasse, mais s'évacuerait directement dans les conduites. Celles-ci ne seraient pas en charge au point B, mais uniquement à partir de l'altitude correspond à la cote du point B.

Question (4)

La vitesse de l'eau ne change pas, elle est fixée par la conservation du débit. On tient maintenant compte du frottement par perte de charge qui s'écrit pour une conduite individuelle :

$$\Delta H_i = f \frac{L_t}{2r} \frac{v^2}{2g},$$

avec L_t la longueur totale des conduites. En appliquant le théorème de Pythagore, on trouve que la longueur d'une conduite entre A et P vaut

$$L_{ap} = \sqrt{\left(\frac{L-\ell}{2}\right)^2 + (z_a - z_p)^2} = 1171{,}4 \text{ m}.$$

La longueur totale des conduites est donc :

$$L_t = \ell + 2L_{ap} = 2612{,}8 \text{ m}.$$

La perte de charge totale est donc :

$$\Delta H = 9\Delta H_i = 9f \frac{L_t}{2r} \frac{v^2}{2g}.$$

L'application numérique nous donne :

$$\Delta H = 11{,}7 \text{ m}.$$

Le théorème de Bernoulli implique qu'entre A et B, on doit avoir la conservation de la charge

$$z_a + h_e = \Delta H + z_b + \frac{v^2}{2g} \Rightarrow h_e = \Delta H - \Delta Z + \frac{v^2}{2g} = 3{,}8 \text{ m}.$$

La hauteur d'eau dans le réservoir de chasse est $h_e = 3{,}8$ m.

Le réservoir de chasse permet de mettre en charge l'écoulement et d'avoir une hauteur d'eau suffisante pour compenser les pertes de charge par frottement. Il est suffisamment haut pour supporter des débits supérieurs au débit nominal $Q = 12 \times 10^3$ m^3/jour.

Question (5)

On se sert de l'équation du seuil dénoyé pour trouver la charge à l'amont du seuil :

$$H = p + \frac{3}{2}\left(\frac{q}{C_D\sqrt{g}}\right)^{2/3},$$

avec le débit par unité de largeur :

$$q = \frac{Q}{b} = 231 \text{ L/s/m}.$$

On trouve que :

$$H = 1{,}37 \text{ m}.$$

La hauteur h_r vérifie :

$$h_r + \frac{\bar{u}_r^2}{2g} = H, \tag{5}$$

avec $\bar{u}_r = Q/(h_r B)$ la vitesse dans le réservoir. IL faut résoudre l'équation (5), qui est un polynôme du troisième ordre :

$$h_r = 1{,}37 \text{ m}.$$

On aurait directement pu faire l'hypothèse $u_r \ll 1$ m/s comme nous y invite l'énoncé et donner une estimation de h_r en prenant $h_r = H$.

Question (6)

Comme le radier est à forte pente, la hauteur tend rapidement vers la hauteur normale. Si on résout l'équation (4) avec $i = i_r = 0{,}18$, on trouve :

$$h_n = 7{,}2 \text{ cm},$$

et comme on s'attend à avoir une petite hauteur d'eau, on aurait pu faire directement l'approximation de canal infiniment large, ce qui donne dans ce cas :

$$h_n = \left(\frac{Q}{BK\sqrt{i}}\right)^{3/5} = 6{,}8 \text{ cm}.$$

Le nombre de Froude vaut :

$$\mathrm{Fr} = \frac{Q}{b\sqrt{gh_n^3}} = 3{,}8 > 1.$$

L'écoulement est (sans surprise) supercritique.

Dans le canal à pente douce, la hauteur normale est celle calculée à la question (a), et le régime y est subcritique. Il se forme donc un ressaut hydraulique à l'entrée dans le canal, à l'aval de la jonction entre le radier et le canal. C'est la même configuration que celle étudiée dans les notes de cours au § 5.6.3.