Conditions d'examen

Professeur responsable : Christophe ANCEY

Durée de l'examen : 3 h 00

Date : jeudi 25 juin 2026 de 9 h 15 à 12 h 15

Lieu : CM 1 3, CM 1 4

---

1. Lisez bien les données, tout ce dont vous avez besoin pour résoudre les exercices y figure !
2. **Écrivez vos nom et prénom(s) en lettres capitales sur chaque feuille.**
3. L'examen comporte deux problèmes, avec en tout 16 questions. Chaque question rapporte 0,40 points. Le total des points est 6,4. La note finale est calculée de la façon suivante : 1 (point de présence) + total des points, donc vous n'êtes pas obligés de répondre à toutes les questions pour avoir la note maximale (autrement dit, il y a des questions bonus).
4. **Aucun document n'est autorisé en dehors d'un formulaire personnel au format A4 (recto et verso). Les calculatrices scientifiques sont autorisées, mais toute éventuelle fonction de communication (wifi, bluetooth) devra être désactivée.**
5. **Le résultat des calculs devra être encadré et écrit de façon très lisible. Les calculs seront éventuellement joints sur des feuilles au propre.** Les feuilles mal écrites ou écrites avec un crayon papier seront considérées comme des brouillons et ne seront pas prises en compte ; **une pénalité de 0,50 (sur la note N) sera appliquée à la note de cet examen** pour ceux qui ne respecteront pas cette consigne. Pour les applications numériques, ne pas oublier les unités.
6. **Valeurs par défaut.** On pose $g = 9{,}81$ m·s^{-2} dans tous les problèmes. La pression atmosphérique p_{atm} est supposée nulle. La masse volumique de l'eau est $\varrho = 1000$ kg·m^{-3} (l'eau est supposée incompressible), et sa viscosité dynamique est $\mu = 1{,}005$ mPa·s.
7. On peut s'arrêter à la première décimale après la virgule pour les applications numériques. On utilisera de préférence les unités les plus adéquates. Par exemple, on écrit 10,8 kN plutôt que 10 823,237 N.

Formulaire.

- La solution analytique d'une équation différentielle ordinaire de la forme

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = A + Bf(z)$$

  où A et B sont deux constantes est

$$f(z) = -\frac{A}{B} + ce^{Bz},$$

  avec c une constante d'intégration.

- La perte de charge dans une conduite est selon la loi de Darcy–Weisbach :

$$\Delta H = f\frac{L}{D}\frac{v^2}{2g},$$

  avec v la vitesse, L la longueur de la conduite, D son diamètre hydraulique, f le coefficient de Darcy–Weisbach.

- Le frottement pariétal est selon la loi de Manning–Strickler :

$$\tau_p = \frac{\varrho g}{K^2}\frac{\bar{u}^2}{R_h^{1/3}},$$

  avec $\bar{u}$ la vitesse, R_h le rayon hydraulique, K le coefficient de Strickler.

- Pour un seuil dénoyé, le débit par unité de largeur passant par-dessus le seuil est

$$q = C_D\sqrt{g}\left(\frac{2}{3}(H-p)\right)^{3/2},$$

  avec C_D le coefficient de débit, p la pelle, H la charge à l'amont du seuil.

Problème 1 *Contexte.* Dès l'Antiquité, les hommes ont ressenti le besoin de mesurer le temps, notamment dans les procès, les assemblées populaires ou pour le suivi astronomique. Plusieurs dispositifs ont été conçus à cet effet, tels que la *clepsydre* (littéralement, du grec voleur [κλέπτω] d'eau [ΰδριος]) et le cadran solaire.

On va s'intéresser à l'amélioration apportée par le savant grec Ctésibios (Κτεσὶπηιος), qui a vécu au 3e siècle avant notre ère à Alexandrie (Égypte). Le principe est relativement simple :

- de l'eau arrive dans un réservoir de section cylindre de rayon R_0. La hauteur d'eau est maintenue constante (elle est notée h_0) grâce à un trop-plein qui déverse l'eau. Ce réservoir est muni d'un orifice à sa base (de rayon a) qui émet un filet d'eau en direction de la clepsydre en contrebas ;
- la clepsydre est un tube de rayon R qui se remplit d'eau grâce au réservoir. À la surface libre se trouve un flotteur en liège tandis qu'à la base se raccorde le tube d'un siphon ;
- le flotteur est muni d'une tige métallique verticale, elle-même reliée à une tige horizontale qui sert de curseur permettant de lire le temps écoulée sur une règle graduée ;
- dès que la surface libre de la clepsydre atteinte la hauteur H_b qui correspond à la cote z_b du point B (sommet du siphon), l'écoulement dans le siphon s'amorce et l'eau de la clepsydre est totalement évacuée.

Problème considéré. La figure 1 montre le schéma de principe de la clepsydre de Ctésibios. La figure 2 montre un réservoir simple. On va commencer par étudier le réservoir simple avant de s'intéresser à la clepsydre de Ctésibios.

Valeurs numériques et hypothèses.

- la masse volumique du liège $\varrho_b = 150$ kg·m^{-3} et son rayon est $b = 9$ cm ;
- les dimensions de la clepsydre de Ctésibios sont $R = 10$ cm et $h = 30$ cm. On parle ici de hauteur utile de fluide, donc entre la base $z = 0$ et le point $z = z_b = 30$ cm ;
- la masse de la tige (axe vertical et curseur) est $m = 250$ g ;
- on néglige la distance entre le point A (entrée du siphon) et la base de la clepsydre, c'est-à-dire on pose $z_a = 0$;

– la cote de la sortie du siphon est $z_c = -10$ cm ;
– la hauteur d'eau dans le réservoir est $h_0 = 50$ cm. Le rayon est $R_0 = 10$ cm.

Questions.

(1) [0,4] On commence par redémontrer la loi de l'hydrostatique et la formule de Torricelli vue en cours pour le réservoir simple (voir figure 2). On considère un réservoir cylindrique de hauteur h_0 et rayon R, muni d'un orifice de rayon r à sa base. Le réservoir est entièrement rempli d'un fluide au repos. On considère un volume de contrôle sous la forme d'une tranche de fluide (voir figure 2) entre les cotes z et $z + \mathrm{d}z$. Que vaut la contrainte de frottement τ le long de la paroi si le fluide est de l'eau ?

(2) [0,4] Écrire l'équation différentielle d'équilibre de la tranche de fluide et déterminer la distribution de pression au sein du fluide (au repos, la contrainte normale σ vaut la pression p du fluide) ; montrer que la pression est hydrostatique.

(3) [0,4] Le principe du sablier est de remplacer l'eau par du sable. Le sable est un fluide granulaire dont le comportement peut être décrit par la loi de Coulomb :

$$\tau = \mu\sigma,$$

où τ est la contrainte pariétale, μ est le coefficient de frottement à la paroi, et σ est la contrainte normale (assimilable à la pression dans le cas présent, car dans un fluide granulaire – comme pour un fluide newtonien – la pression est supposée isotrope). Écrire le bilan des forces sur le volume de contrôle de la figure 2, en déduire l'équation différentielle régissant la contrainte normale σ et la résoudre. Montrer que la pression devient indépendante de la hauteur de fluide et tend vers une constante quand le rapport h_0/R est suffisamment grand.

(4) [0,4] En vous servant de l'analyse dimensionnelle, montrez que le débit volumique Q de fluide granulaire passant par l'orifice à la base du réservoir est nécessairement une fonction puissance du rayon de l'orifice r (à déterminer).

(5) [0,4] On revient au fluide parfait. Montrer que dans ce cas-là, le débit est fonction de la hauteur h_0 et du diamètre r.

(6) [0,4] En supposant que la formule de Torricelli est valable même lorsque la hauteur h_0 varie au cours du temps, calculez le temps qu'il faut pour vider le réservoir.

(7) [0,4] Discutez brièvement de l'intérêt comparatif du sablier par rapport à la clepsydre simple.

(8) [0,4] On s'intéresse maintenant à la clepsydre de Ctésibios (voir figure 1). Quelle doit être l'épaisseur e minimale du flotteur pour que sa surface supérieure émerge et qu'il supporte le poids de la tige ?

(9) [0,4] Lorsque la hauteur d'eau atteint la cote z_b du point B (sommet du siphon), l'eau commence à s'écouler dans le siphon. En considérant une ligne de courant entre les points A et C passant par B, calculez la pression en A, B, et C ainsi que la vitesse de l'eau dans le tube.

(10) [0,4] On souhaite que la clepsydre marque toutes les périodes de 10 minutes, c'est-à-dire qu'elle se vide toutes les dix minutes et qu'il faille donc dix minutes pour que le réservoir – qui l'alimente en eau – la remplisse de nouveau. Quel doit être le rayon a de l'orifice du réservoir pour que cette condition soit satisfaite.

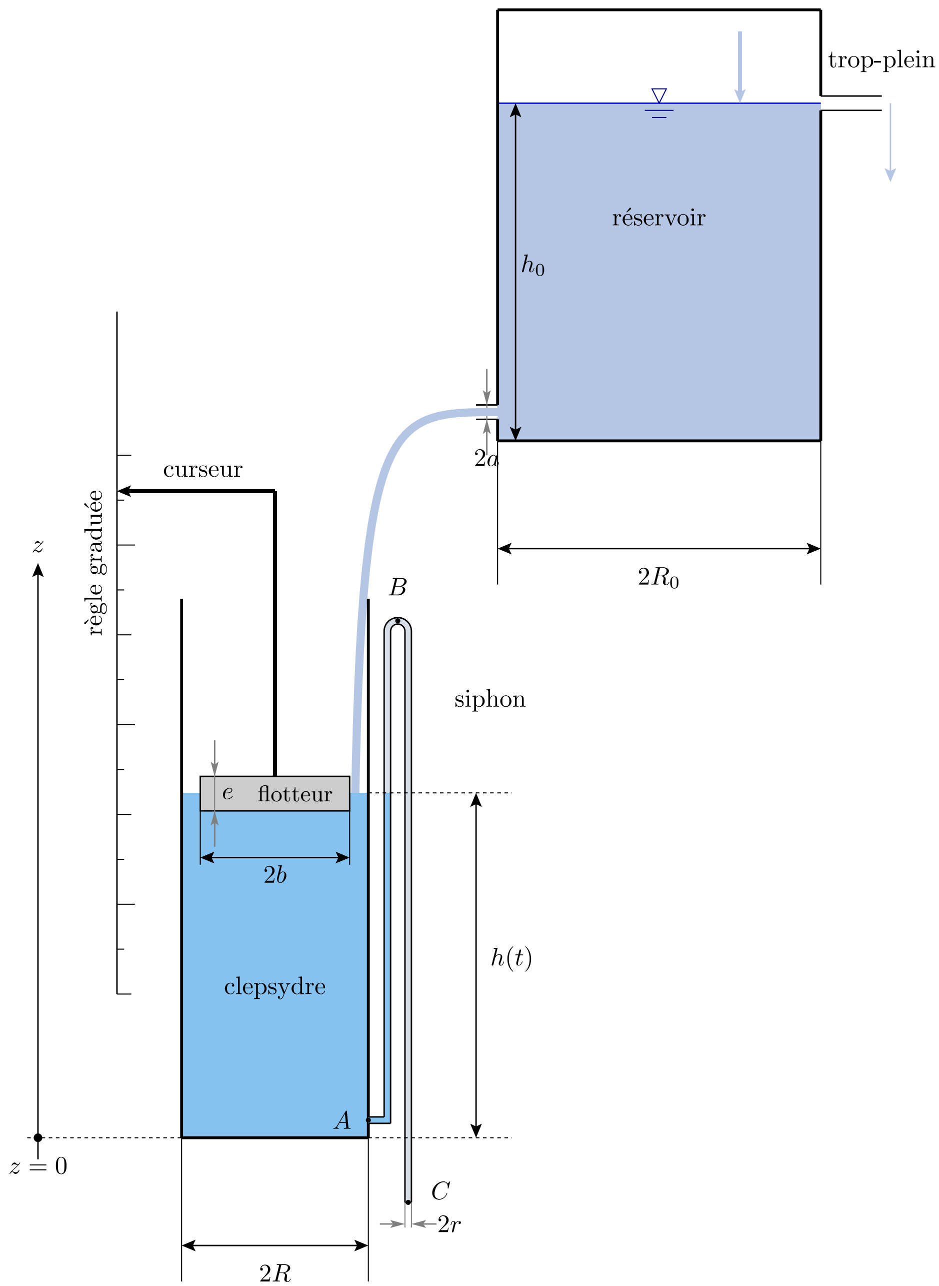

Figure 1 – Schéma de principe de la clepsydre de Ctésibios. Les échelles de longueur ne sont pas respectées.

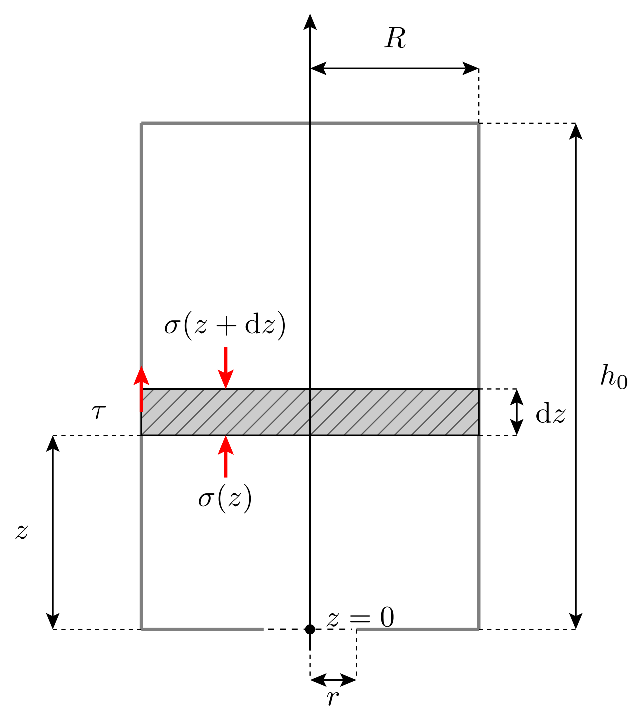

Figure 2 – Équilibre d'une tranche de fluide.

Problème 2 *Contexte.* Les Romains sont connus pour les ouvrages d'art pour transporter de l'eau sur de grandes distances grâce à des aqueducs. Un problème majeur était le franchissement d'une vallée. Un possibilité était de construire un pont-aqueduc comme le fameux pont du Gard, mais de tels ouvrages coûtaient très cher. Un autre dispositif bien moins onéreux était le pont-siphon, qui consistait à faire passer l'eau (écoulement à surface libre) dans des conduites forcées (écoulement en charge) qui suivaient le terrain naturel, c'est-à-dire que l'eau descendait jusqu'au fond de vallée, longeait ce fond, puis remontait la pente opposée. Les Romains ne connaissaient ni l'acier, ni la fonte, ce qui limitait la conception de conduites capables de supporter de fortes pressions. En revanche, ils disposaient en abondance de plomb (sous-produit de l'extraction minière de l'argent) qui permettaient de faire des conduites de petit diamètre, supportant des pressions raisonnables, faciles à créer et peu onéreuses.

On va étudier ici le pont-siphon de l'aqueduc du Gier qui alimentait Lyon (*Lugdunum*) en eau en l'acheminant du mont Pilat jusqu'à la colline de Fourvière sur une distance de 86 km. Pour franchir la vallée de l'Izeron, l'aqueduc utilisait un pont-siphon (voir figure 3) :

- l'eau est acheminée par l'aqueduc jusqu'à un grand réservoir dit « réservoir de chasse » de hauteur h qui permet de mettre l'eau en charge ;
- l'eau est alors transportée dans une série de 9 conduites forcées parallèles (en plomb), qui suivent le terrain naturel entre les points A et B ;
- les conduites sont horizontales dans le fond de vallée entre les points P et Q qui marquent l'extrémité du tablier du pont-siphon ;
- l'eau remonte jusqu'à un second réservoir appelé « réservoir de fuite », qui lui permet de repasser sous la forme d'un écoulement à surface libre ;
- ce réservoir se termine par un seuil de pelle p, qui déverse l'eau dans un radier à forte pente i_r ;
- l'eau continue ensuite avec la même pente douce i_c.

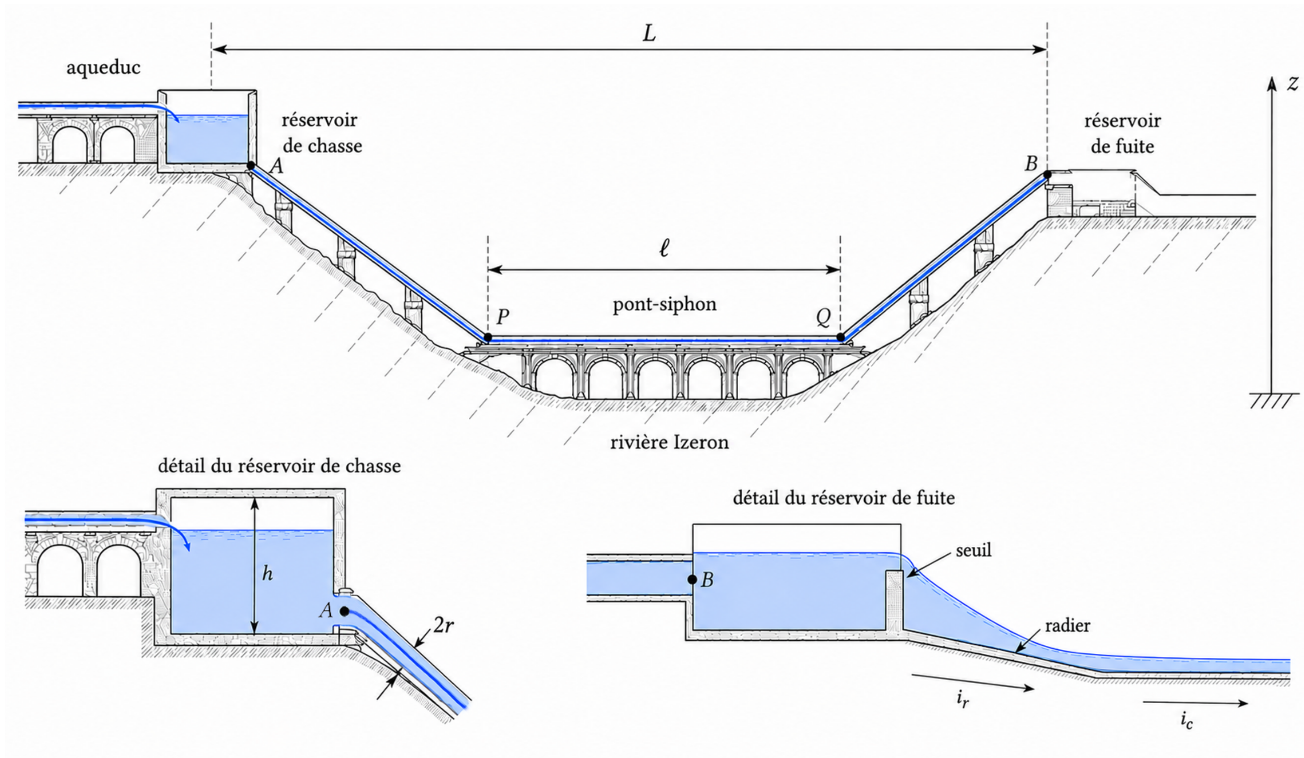

Figure 3 – Schéma de principe du pont-siphon de l'aqueduc du Gier. Le schéma ne respecte pas les rapports d'aspect des différentes longueurs. Notamment, le diamètre des conduites est fortement exagéré.

Valeurs numériques et hypothèses.

- la hauteur du réservoir de chasse est $h = 10$ m (largeur 1,5 m, longueur 5,4 m) ;
- le réservoir de fuite a une largeur $B = 1{,}8$ m pour une longueur 10 m, et il a un fond horizontal. Il se termine par un seuil de pelle $p = 1$ m et de largeur 60 cm. Le coefficient de débit est $C_D = 0{,}6$;
- le débit d'eau transportée par l'aqueduc est constant et il a été estimé par l'archéologue Jean Burdy à $Q = 12 \times 10^3$ m^3/jour ;
- le canal est constitué de maçonnerie jointée avec un parement cimenté. Sa section en travers est rectangulaire, et elle est surmontée d'une voûte. La largeur est $b = 60$ cm, la hauteur du piédroit (paroi latérale entre le fond et la base de la voûte) est 140 cm. Le coefficient de Manning-Strickler est $K = 50$ m$^{1/3}$·s^{-1} ;
- le canal à l'amont du réservoir de chasse et celui à l'aval du réservoir de fuite ont les mêmes caractéristiques ;
- la pente du canal de l'aqueduc à l'amont du réservoir de chasse et à l'aval du réservoir de fuite est constante et vaut $i_c = 1$ ‰ ;
- la pente du radier à l'aval du réservoir de fuite est $i_r = 18$ % ;
- la longueur de la vallée – entre les deux réservoirs – est $L = 2{,}6$ km ;
- la longueur du pont-siphon est $\ell = 270$ m ;
- la longueur des conduites entre A et P est identique à celle entre Q et B ;
- la cote du réservoir de chasse (en A) est $z_a = 313{,}7$ m ;
- la cote du réservoir de fuite (en B) est $z_b = 305{,}8$ m ;
- la cote du pont-siphon (en P ou Q) est $z_p = z_q = 191{,}4$ m ;
- le coefficient de Darcy–Weisbach du plomb est supposé constant $f = 0{,}03$;
- le diamètre des conduites en plomb est $2r = 26$ cm ;
- les pertes de charge singulières sont négligées ;
- la vitesse est nulle dans les réservoirs.

Les données sont tirées principalement de l'article de Paul M. Kessener, The Aqueducts of Lugdunum, *Water*, **16**, 2117, 2024.

Questions.

(1) [0,4] Quelle est la hauteur normale dans le canal de l'aqueduc ?

(2) [0,4] Quelle est la vitesse de l'eau et quel est le régime d'écoulement dans le canal ?

(3) [0,4] On néglige dans un premier temps tout frottement dans les conduites de plomb. Quelle est la vitesse de l'eau v dans les conduites ? Quelle est la hauteur d'eau h_e dans le réservoir de chasse ? Comme expliquer ce résultat surprenant ?

(4) [0,4] On prend maintenant en compte le frottement dans les conduites de plomb. Quelle est la vitesse de l'eau v dans les conduites ? Quelle est la hauteur d'eau h_e dans le réservoir de chasse ? En conclure sur l'utilité du réservoir de chasse.

(5) [0,4] Quelle est la hauteur d'eau h_r dans le réservoir de fuite ?

(6) [0,4] Quelle est la forme de la courbe de remous dans le canal à l'aval du seuil ? On pourra faire un croquis et justifier brièvement.