Corrigé détaillé de l'examen

Professeur responsable : Christophe ANCEY

Problème 1

Question (1)

On applique le principe d'Archimède. Le volume du caisson vaut :

$$V = a^2 e = 126{,}75 \text{ m}^3,$$

et donc la poussée d'Archimède maximale correspond au poids du volume d'eau équivalent :

$$F = \varrho g V = 1243{,}4 \text{ kN}.$$

Question (2)

La force d'Archimède doit compenser le poids du caisson P_c et le poids P_b du bloc placé dessus :

$$P_c = \varrho_b g V,$$

et donc la charge maximale est le poids déjaugé quand le caisson est immergé :

$$P_b = F - P_c = (\varrho - \varrho_b) g V = 547{,}1 \text{ kN}.$$

Question (3)

On place un bloc de masse $m = 300$ kg. Le poids est

$$P_b = mg = 2493 \text{ N}.$$

La force totale de pression doit contrebalancer le poids du caisson et celui du bloc, soit :

$$P = P_b + P_c = 699{,}3 \text{ kN}.$$

La force d'Archimède A est obtenue en calculant le volume immergé (sur une hauteur h)

$$A = \varrho g a^2 h,$$

et donc de la condition $A = P$, on tire :

$$h = \frac{P}{\varrho g a^2} = 1{,}69 \text{ m}.$$

La hauteur non immergée est donc

$$h_{air} = e - h = 1{,}31 \text{ m}.$$

La cote de la base du bloc est

$$z_{bloc} = z_{nord} + 1{,}31.$$

Question (4)

L'eau s'arrête de monter dans le puits nord lorsque la cote des eaux est identique dans les puits sud et nord, donc :

$$\max z_{nord} = 10 \text{ m}.$$

Question (5)

On considère un point A à l'entrée de la conduite. La charge est la somme de la pression hydrostatique et du potentiel gravitaire (convertie en mètres de colonne d'eau) :

$$H_A = z_m.$$

On considère la charge au point B à la sortie de la conduite. La charge est égale à la pression hydrostatique, donc ici :

$$H_B = z_{nord}.$$

La différence de charge est donc :

$$\Delta H = H_A - H_B = z_m - z_{nord} = 2 \text{ m}. \quad (1)$$

La formule de pertes de charge régulières est :

$$\Delta H_r = f\frac{u^2}{2g}\frac{L}{d},$$

avec la vitesse débitante :

$$u = 4\frac{Q}{\pi d^2}.$$

Pour le coefficient de frottement de Darcy–Weisbach, on peut prendre l'équation de Colebrook :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -0{,}91 \ln\left(\frac{2{,}51}{R\sqrt{f}} + 0{,}27\frac{k_s}{d}\right), \quad (2)$$

avec R le nombre de Reynolds de l'écoulement :

$$R = \frac{ud}{\nu}.$$

Les pertes de charge singulières sont

$$\Delta H_s = \zeta_A\frac{u^2}{2g} + \zeta_B\frac{u^2}{2g} = \frac{u^2}{2g},$$

avec ici $\zeta_A = \zeta_b = 0{,}5$. La perte de charge totale est donc

$$\Delta H = \frac{u^2}{2g} + f\frac{u^2}{2g}\frac{L}{d} = \frac{u^2}{2g}\left(1 + f\frac{L}{d}\right). \quad (3)$$

Il faut résoudre $\Delta H = 2$ m avec f donné par l'équation de Colebrook (2). On trouve :

$$f = 0{,}018 \text{ et } u = 2{,}92 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Le débit est donc

$$Q = \frac{\pi}{4}d^2u = 2{,}3 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}.$$

On examine dans quel régime on se situe :

$$k_s^+ = \frac{k_s u_*}{\nu} \text{ avec } u_* = \sqrt{\frac{\tau_p}{\varrho}} = \sqrt{\frac{f}{8}}u = 0{,}138 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

On trouve

$$k_s^+ = 138 > 70,$$

et donc le régime est hydrauliquement rugueux. L'équation de Colebrook est donc bien adaptée.

Question (6)

La distribution de pression est :

$$p(z) = \varrho g(z_{nord} - z).$$

La résultante des forces de pression sur la vanne est donc :

$$F = \ell \int_0^h p(z)\mathrm{d}z = \ell \varrho g \frac{(z_{nord})^2 - (z_{nord} - h)^2}{2} = \ell \varrho g \frac{2z_{nord}h - h^2}{2} = 73{,}6 \text{ kN}.$$

Question (7)

On commence par le calcul des forces de pression. Sur la face S_1, c'est le même calcul que pour la question (6) :

$$F_{p,1} = \ell \int_0^h p(z)\mathrm{d}z = \ell \varrho g \frac{(z_{nord})^2 - (z_{nord} - h)^2}{2} = 73{,}6 \text{ kN}.$$

Sur la face S_2, on trouve (en valeur absolue) :

$$F_{p,2} = \ell \int_0^{h/2} p(z)\mathrm{d}z = \ell \varrho g \frac{(z_{nord})^2 - (z_{nord} - h/2)^2}{2} = 38{,}0 \text{ kN}.$$

Prenons le point A' ($z_{a'} = 0{,}5$ m) à mi-hauteur de la section S_1. La formule de Torricelli nous dit que la vitesse moyenne à travers S_1 a pour ordre de grandeur :

$$\bar{u}_1 = \sqrt{2g(z_{nord} - z_{a'})} = 12{,}1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

La vitesse dans la section S_2 est obtenue par conservation du débit :

$$\bar{u}_2 = \frac{h}{h/2}\bar{u}_1 = 2\bar{u}_1 = 24{,}2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Le flux de quantité de mouvement est donc pour la section S_1 (en valeur absolue) :

$$F_{q,1} = \left| \varrho \ell \int_0^h u_1(\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{n})\mathrm{d}z \right| = \varrho \ell h u_1^2 = 147{,}1 \text{ kN},$$

tandis que pour le flux de quantité de mouvement à travers S_2, on a :

$$F_{q,2} = \varrho \ell \int_0^{h/2} u_2(\boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{n})\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\varrho \ell h u_2^2 = 294{,}3 \text{ kN},$$

On se sert des résultats vus en cours (voir § 4.1.6). Appelons R l'action du fluide sur la paroi. Compte tenu du principe d'action et de réaction, la conservation de la quantité de mouvement en régime permanent implique :

$$\int_{S_1+S_2} \varrho \boldsymbol{u}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})\mathrm{d}S = -\boldsymbol{R} + (F_{p,1} - F_{p,2})\boldsymbol{e}_x,$$

soit encore en projetant sur l'axe $\boldsymbol{e}_x$ et en prenant en compte la direction des différentes contributions :

$$F_{q,2} - F_{q,1} = -R + F_{p,1} - F_{p,2} \Rightarrow R = F_{p,1} + F_{q,1} - (F_{p,2} + F_{q,2}).$$

L'application numérique fournit la valeur

$$R = -111{,}6 \text{ kN}.$$

La forte augmentation de vitesse au passage de la contracture et la valeur élevée des flux de quantité de mouvement (au regard des pressions) entraînent le développement de pression négative sur la paroi coulissante.

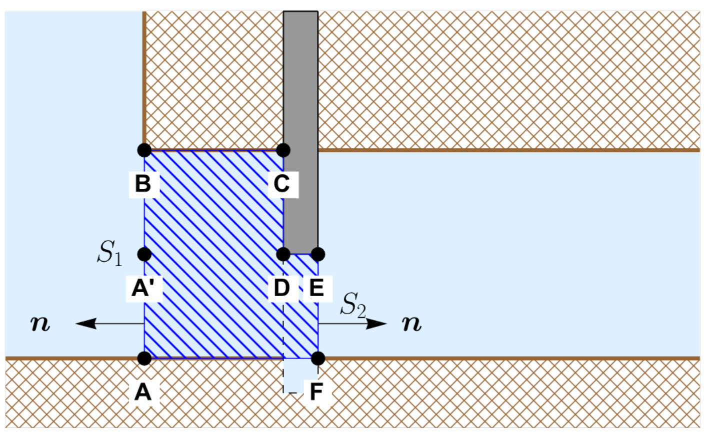

Figure 1 – Pour la question (7), on considère le volume de contrôle reporté en hachuré de largeur ℓ et de pourtour ABCDEF. La section entrante est S_1, et la section sortante est S_2.

Problème 2

Question (1)

La hauteur normale est donnée par l'équation de Manning–Strickler :

$$Q = K R_h^{2/3} \sqrt{i} S, \tag{4}$$

avec la section mouillée fournie par le tableau 5.3 des notes de cours :

$$S = R^2(\delta - \sin\delta\cos\delta),$$

avec $R = D/2 = 60$ cm le rayon de la conduite. Le périmètre mouillé est $\chi = 2R\delta$. Il s'ensuit que le rayon hydraulique est

$$R_h = \frac{S}{\chi} = R\frac{\delta - \sin\delta\cos\delta}{2\delta}.$$

On résout l'équation implicite (4), et on trouve que $\delta = 77{,}8°$ et

$$h = 47{,}3 \text{ cm}.$$

Question (2)

On fait un bilan des forces agissant sur la particule de volume moyen $V = \frac{4}{3}\pi r_s^3$ (avec $r_s = d_s/2 = 0{,}5$ mm le rayon moyen des particules) en régime permanent :

$$\varrho_s g V = \varrho g V + \frac{1}{2} C_d \pi \varrho r_s^2 w_s^2$$

où l'a écrit que le poids est compensé par la force d'Archimède et la force de traînée exprimée à partir de la vitesse de sédimentation w_s. On déduit la vitesse de sédimentation :

$$w_s^2 = \frac{(\varrho_s - \varrho)g}{\frac{1}{2}C_d\pi\varrho r_s^2}\frac{4}{3}\pi r_s^3 = \frac{\varrho_s - \varrho}{\varrho}\frac{8}{3C_d} g r_s \tag{5}$$

où le coefficient de traînée C_d est donné par l'équation de Haider–Levenspiel :

$$C_d = \frac{24}{R}(1 + 0{,}1806 R^{0.6459}) + \frac{0{,}42151}{1 + 6880{,}95/R}, \tag{6}$$

avec le nombre de Reynolds particulaire R :

$$R = \frac{wd}{\nu}.$$

On trouve en résolvant l'équation implicite (5) :

$$w_s = 15{,}8 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Le nombre de Reynolds particulaire vaut :

$$R = \frac{w_s d_s}{\nu} = \frac{15{,}8 \times 10^{-2} \times 10^{-3}}{10^{-6}} \approx 158.$$

Pour $R \sim 1{,}6 \times 10^2$, les données expérimentales de Dioguardi et col. donnent une valeur approximative $C_d \sim 2$ alors que la formule de Haider–Levenspiel donne $C = 0{,}88$. Il y a donc environ un facteur 2,5 entre les deux estimations. Comme la vitesse de sédimentation varie comme $w_s \propto C_d^{-1/2}$, cela veut dire que les vitesses réelles de sédimentation sont plus faibles (d'un facteur $\sqrt{2{,}5}$) que les vitesses estimées à l'aide de l'équation de Haider–Levenspiel

Question (3)

Le débit par unité de largeur est donné par l'équation (5.34) des notes de cours. On a donc pour le débit total :

$$Q = W\sqrt{g}\left(\frac{2}{3}(H-p)\right)^{3/2},$$

soit encore pour la charge H à l'amont immédiat du seuil :

$$H = p + \frac{3}{2}\left(\frac{Q}{W\sqrt{g}}\right)^{2/3}.$$

La charge vaut donc :

$$H = 2{,}7 \text{ m}.$$

La hauteur d'écoulement est donnée par

$$H = h + \frac{\bar{u}^2}{2g} = h + \frac{Q^2}{2g\ell^2 h^2}, \tag{7}$$

avec $\bar{u}$ la vitesse moyenne dans le bassin de décantation. On a fait attention au fait que le seuil et le bassin n'ont pas la même largeur. L'équation (7) est un polynôme de degré 3, qui n'a qu'une seule racine correspondant au régime subcritique :

$$h = 2{,}70 \text{ m}.$$

La largeur du bassin est telle que le terme d'énergie cinétique $\bar{u}^2/(2g) \ll h$. Il s'ensuit que la vitesse moyenne est

$$\bar{u} = \frac{Q}{\ell h} = 7{,}4 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Question (4)

Le temps de sédimentation est

$$t_s = \frac{h}{w_s} = 17 \text{ s}.$$

Durant ce laps de temps, la particule parcourt la distance $L_s = t_s \bar{u} = 1{,}3$ m. La distance minimale du bassin est donc :

$$L \geq L_s = t_s \bar{u} = 1{,}3 \text{ m}.$$

La longueur du bassin de décantation n'est pas fixée en fonction de la sédimentation du sable, car celle-ci se fait assez rapidement compte tenu des vitesses très faibles dans le bassin.

Question (5)

Un volume $V = 30$ cm^3 correspond à une hauteur h dans le tube de rayon $r = 1$ cm :

$$h = \frac{V}{\pi r^2} = 9{,}5 \text{ cm}.$$

Considérons les points A et B dans chacune des extrémités du tube, placés à la même altitude fixée par l'interface huile/eau. Au point A, on déduit que la hauteur d'eau est

$$h_e = h - \Delta h = 6{,}5 \text{ cm}$$

et la pression est donc

$$P_A = \varrho g h_e.$$

Au point B, la pression est imposée par le poids de l'huile :

$$P_B = \varrho_h g h.$$

Pour une même altitude au sein d'un fluide, la pression est identique. Donc on tire

$$P_B = P_A \Rightarrow \varrho_h = \frac{\varrho h_e}{h} = 685 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}.$$

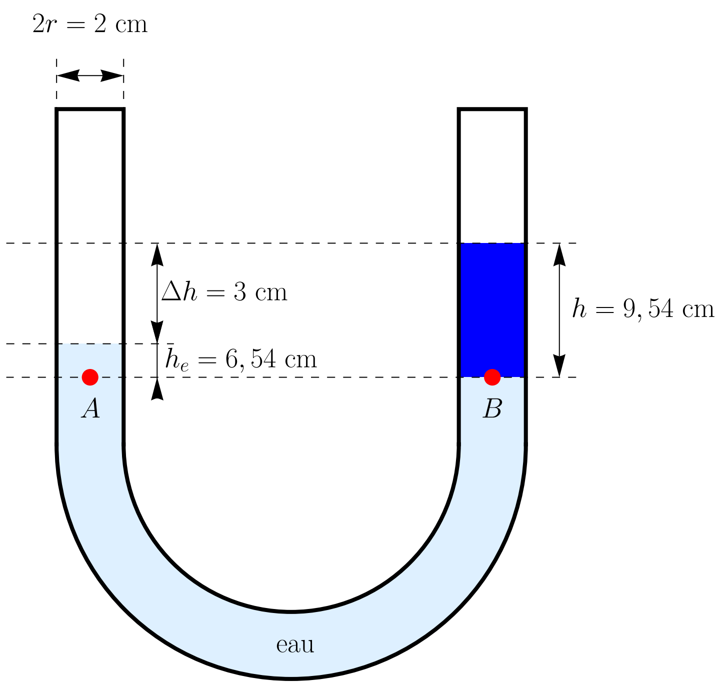

Figure 2 – Points A et B. Le dessin ne respecte pas les échelles !

Question (6)

Comme l'entrefer est mince, la contrainte de cisaillement est

$$\tau = \mu \frac{\Omega R_1}{e}.$$

Cette contrainte est indépendante de la hauteur. Le couple infinitésimal exercé sur un élément $\mathrm{d}S = \mathrm{d}z \times R_1 \mathrm{d}\theta$ est $\mathrm{d}C = R_1 \tau \mathrm{d}S$. Le couple total exercé par le fluide sur le cylindre intérieur est donc :

$$C(\Omega) = \int_0^h \int_0^{2\pi} R_1\, \tau \mathrm{d}z \times R_1 \mathrm{d}\theta = 2\pi R_1^2 h \tau = 2\pi\mu \frac{R_1^3 h}{e} \Omega. \tag{8}$$

En égalant la valeur mesurée avec l'expression théorique (8), on trouve que la viscosité dynamique vaut :

$$\mu = 15{,}3 \text{ mPa} \cdot \text{s}.$$

La viscosité cinématique vaut donc :

$$\nu = \frac{\mu}{\varrho_h} = 22{,}3 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}.$$