

Conditions d'examen**Professeur responsable :** Christophe ANCEY**Documentation autorisée :** toute documentation**Matériel autorisé :** calculatrice ou laptop (sans connexion bluetooth ou wifi)**Durée de l'examen :** 3 h 00**Date :** vendredi 27 juin 2025 de 9 h 15 à 12 h 15**Lieu :** salle AAC 2 31.

-
1. Lisez bien les données, tout ce dont vous avez besoin pour résoudre les exercices y figure !
 2. **Écrivez vos nom et prénom(s) en lettres capitales sur chaque feuille.**
 3. L'examen comporte deux problèmes, avec en tout 13 questions. Chaque question rapporte de 0,40 à 0,80 point. Le total des points est 6,0. La note finale est calculée de la façon suivante : 1 (point de présence) + total des points, donc vous n'êtes pas obligés de répondre à toutes les questions pour avoir la note maximale (autrement dit, il y a des questions bonus). Le barème de chaque question est indiquée en début de question.
 4. **Tout document est autorisé. Calculatrices scientifiques et laptops sont autorisés, mais toute fonction de communication (wifi, bluetooth) devra être désactivée. Il est interdit d'utiliser des logiciels de type DeepSeek faisant appel à un agent conversationnel et exploitant un grand modèle de langage** (de l'intelligence artificielle en termes familiers).
 5. **Le résultat des calculs devra être encadré et écrit de façon très lisible. Les calculs seront éventuellement joints sur des feuilles au propre.** Les feuilles mal écrites ou écrites avec un crayon papier seront considérées comme des brouillons et ne seront pas prises en compte ; **une pénalité de 0,50 (sur la note N) sera appliquée à la note de cet examen** pour ceux qui ne respecteront pas cette consigne. Pour les applications numériques, ne pas oublier les unités.
 6. **Valeurs par défaut.** On pose $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ dans tous les problèmes. La pression atmosphérique p_{atm} est supposée nulle. La masse volumique de l'eau est $\rho = 1000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ (l'eau est supposée incompressible), et sa viscosité dynamique est $\mu = 1,005 \text{ mPa}\cdot\text{s}$.

7. On peut s'arrêter à la première décimale après la virgule pour les applications numériques. On utilisera de préférence les unités les plus adéquates. Par exemple, on écrit 10,8 kN plutôt que 10 823,237 N.

Problème 1 *Contexte.* La pyramide de Djéser a été construite à Saqqarah (Égypte) vers -2680. C'est la première construction monumentale, adoptant une forme de pyramide à degrés (voir figure 1). Elle a une hauteur de 62 m par rapport au terrain naturel. La méthode de construction est inconnue. Au cours de ce problème, on va examiner une hypothèse pour expliquer comment des blocs de grande taille ont pu être élevés.

La masse moyenne des blocs est de 300 kg (leur taille est environ $50 \times 50 \times 50 \text{ cm}^3$). Les fouilles archéologiques ont mis en évidence qu'au troisième millénaire, la région de Saqqarah était bien plus verdoyante que de nos jours; elle était notamment traversée par la rivière Abusir, un affluent du Nil en rive gauche, et elle était bordée de plusieurs lacs. La présence d'eau en abondance a souvent été mise en eau pour expliquer qu'on ait pu transporter des pierres de taille sur de grandes distances de leur lieu d'extraction au lieu de construction.

Une équipe pluridisciplinaire française¹ a suggéré en 2024 que l'eau a pu être utilisée également pour élever les blocs. En effet, les traces archéologiques montrent qu'il existait un système hydraulique comprenant un barrage de correction torrentielle de la rivière Abusir, un bassin de décantation, des puits et un réseau de galeries. L'équipe française a émis l'idée que le puits central de la pyramide n'était pas le puits d'accès à la chambre funéraire, mais un élévateur mû par l'eau. L'objet de ce problème est de tester la vraisemblance de cette idée du point de vue hydraulique.

Problème considéré. La figure 2 montre le principe de fonctionnement de l'élévateur tel qu'imaginé par Landreau et des coauteurs. Nous allons réaliser une étude simplifiée (et adaptée pour les besoins de cet examen), et on se reportera à la figure 3 pour le fonctionnement de l'élévateur considéré ici :

- Le puits sud est alimenté en eau par la rivière Abusir, et on suppose que son niveau d'eau est maintenu constant à la cote $z_m = 10 \text{ m}$ par rapport à la cote de référence.

1. Landreau, X., G. Piton, G. Morin, P. Bartout, L. Touchart, C. Giraud, J.-C. Barre, C. Guerin, A. Alibert, and C. Lallemand, On the possible use of hydraulic force to assist with building the step pyramid of Saqqara, *PloS one*, 19, e0306690, 2024. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0306690>



Figure 1 – Pyramide du roi Djéser de la III^e dynastie. Source : [Vyacheslav Argenberg](#).

- Ce puits peut alimenter le puits nord au moyen d’une conduite de section circulaire taillée dans le granite, dont l’ouverture est contrôlée par une vanne (dite « vanne sud »).
- Un caisson en bois est placé dans le puits nord.
- Ce caisson peut accueillir un bloc de masse m .
- Une vanne (dite « vanne nord ») sert à évacuer l’eau une fois l’opération d’élévation du bloc achevée.
- Quand l’eau arrive dans le puits nord, le caisson flotte et s’élève dans le puits au fur et à mesure que le niveau d’eau z_{nord} augmente.

Pour manœuvrer cet élévateur hydraulique, on procède comme suit :

- Initialement, le puits nord est vide d’eau.
- On ferme la vanne nord, et on ouvre la vanne sud.
- Au temps t , l’eau est montée jusqu’à la cote $z_{nord}(t)$.
- Lorsqu’on veut faire redescendre le caisson, on ferme la vanne sud, puis on ouvre la vanne nord.

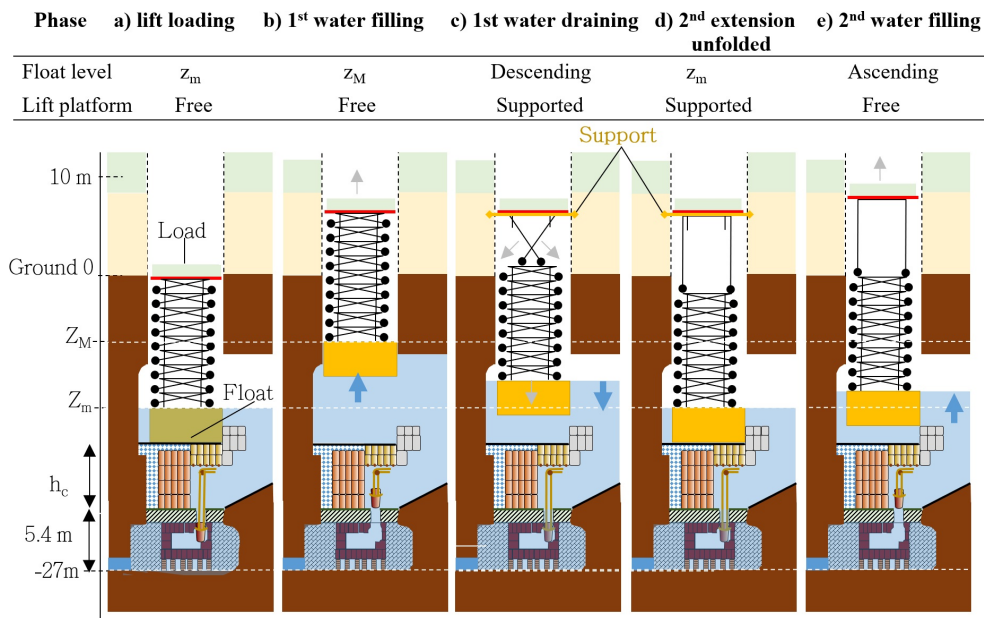


Figure 2 – Principe de l’élèveur hydraulique selon Landreau *et col.* (2024). Cette figure n’est fournie que pour expliquer le principe du monte-charge hydraulique imaginé par Xavier Landreau et ses collègues ; par la suite, on utilisera une version simplifiée, qui est présentée à la figure 3.

- Cette vanne nord est composée d’un panneau de granite qui peut être manœuvré verticalement.
- Lorsqu’il est en position basse [voir figure 4(a)], il obstrue la conduite de vidange de section carrée qui sert à évacuer les eaux du puits nord.
- Si on le remonte verticalement, l’eau s’engouffre dans la conduite de vidange [voir figure 4(b)].

Valeurs numériques.

- les puits ont une section carrée de côté $c = 7$ m ;
- le caisson en cèdre du liban est à section carrée de côté $a = 6,5$ m et d’épaisseur $e = 3$ m ;
- masse volumique du cèdre du Liban $\rho_b = 560 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$;
- masse des blocs transportés $m = 300$ kg ;
- la galerie a une longueur $L = 200$ m. On suppose qu’elle a un dia-

- mètre $d = 1$ m. Elle est composée en granite poli de rugosité $k_s = 1$ mm;
- les coefficients de perte de charge singulière à l'entrée (A) et à la sortie de la conduite (B) sont estimés comme étant $\zeta = 0,5$;
- la vidange du puits nord se fait par une conduite de section carrée en maçonnerie. La largeur ℓ et la hauteur h de la galerie de vidange sont $\ell = h = 1$ m.

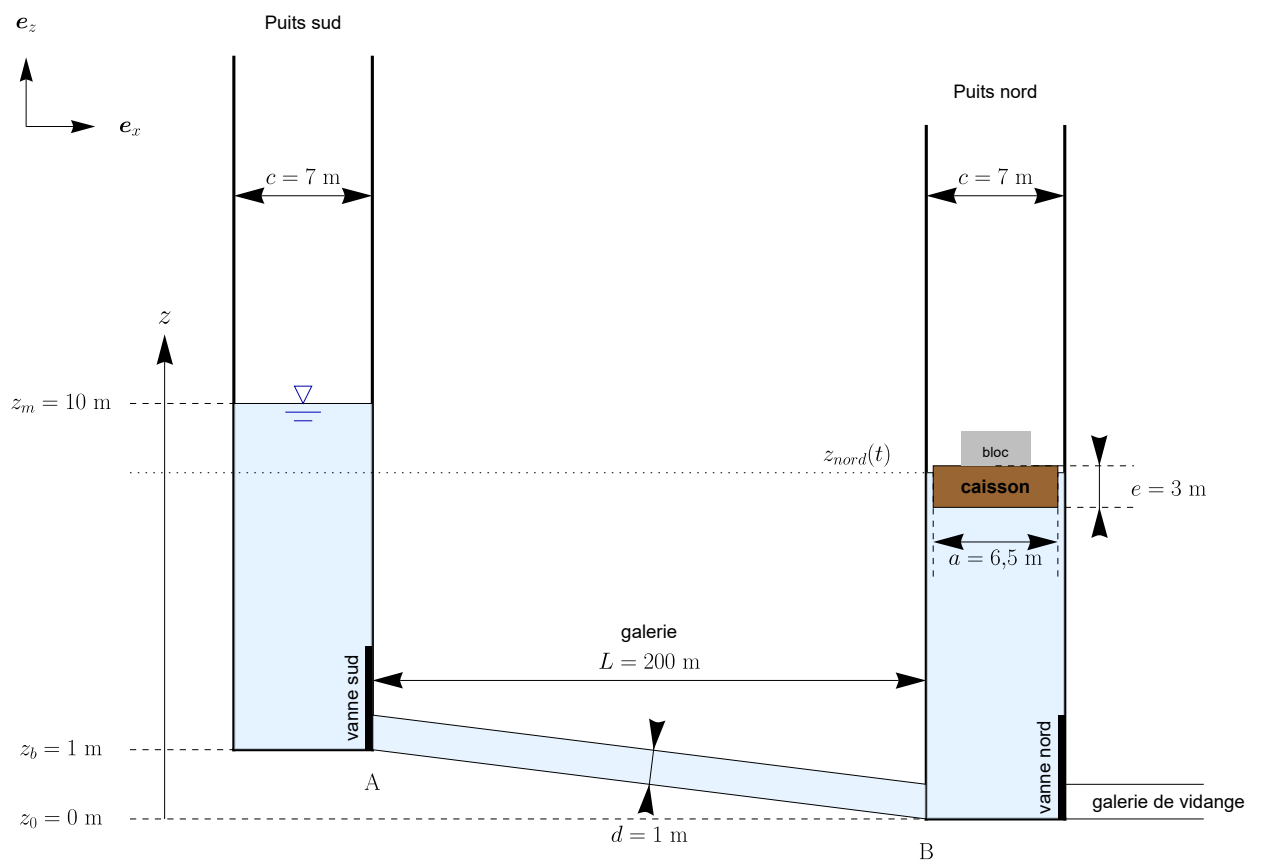


Figure 3 – Schéma du fonctionnement hydraulique de l'élève. Le schéma ne respecte pas les échelles de longueur. Le niveau d'eau dans le puits sud reste maintenu à la cote z_m . Dans le puits nord, ce niveau est variable, et il est noté z_{nord} .

Questions.

- (1) [0,4] Que vaut la résultante des forces de pression sur le caisson quand celui-ci est totalement immergé ?
- (2) [0,4] En déduire la charge maximale (en kN) peut supporter le caisson.
- (3) [0,4] On considère un bloc de 300 kg. Quelle est la cote z_{bloc} de la base du bloc (qui est aussi la cote de la face supérieure du caisson en bois) par rapport à la cote z_{nord} ?
- (4) [0,4] Quelle est la cote maximale que peut atteindre $z_{\text{nord}}(t)$?
- (5) [0,8] Quel est le débit dans la conduite reliant les deux puits si la cote $z_{\text{nord}} = 8$ m ? Vous êtes libre de choisir l'équation de votre choix pour le calcul du frottement, mais il faut justifier votre choix.
- (6) [0,4] Quelle est la résultante des forces de pression sur le panneau de la vanne nord quand il est descendu [vanne fermée, voir figure 4(a)] ?
- (7) [0,8] Quelle est la résultante des forces exercée par l'écoulement sur le panneau de la vanne nord quand il est descendu à moitié [vanne semi-ouverte, voir figure 4(b)] ? Pour répondre à cette question on pourra considérer le volume de contrôle ABCDEF de la figure 4, puis :
 - calculer la force de pression sur les faces S_2 et S_1 en considérant une distribution de pression hydrostatique pour chacune des sections ;
 - calculer la vitesse en S_2 et S_1 . On pourra se contenter d'un calcul approché en négligeant les pertes de charge singulières en première approximation, puis en utilisant le théorème de Bernoulli entre la surface libre et un point de la section S_1 . On supposera que la vitesse est uniforme à travers chaque section.
 - en déduire le flux de quantité de mouvement à travers les sections S_2 et S_1 ;
 - faire le bilan des flux et forces, et déterminer la force exercée par le fluide sur la paroi CD.

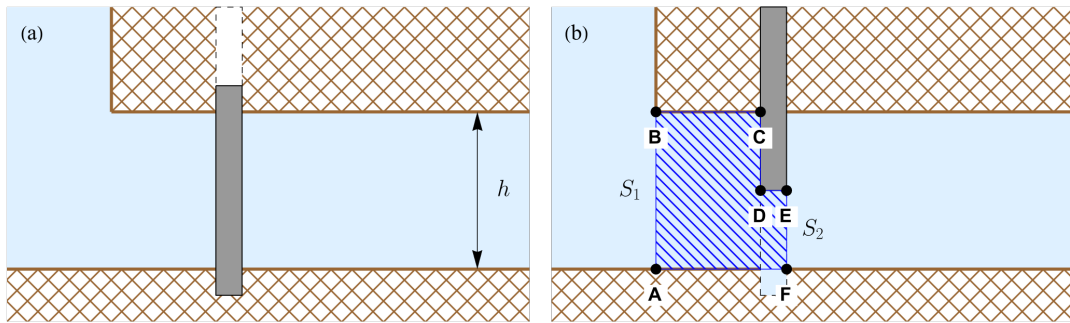


Figure 4 – (a) Vanne fermée : le panneau est descendu jusqu'en bas. (b) Vanne en position semi-ouverte : le panneau est descendu jusqu'à la hauteur $h/2$. Pour la question (7), on pourra considérer le volume de contrôle reporté en hachuré de largeur ℓ et de pourtour ABCDEF. La section entrante est S_1 , et la section sortante est S_2 .

Problème 2 *Contexte.* On étudie le fonctionnement du processus de traitement des eaux usées dans une station d'épuration (STEP). En Suisse comme dans la plupart des pays occidentaux, il est désormais obligatoire de traiter séparément les eaux pluviales et les eaux usées issues d'une utilisation domestique et industrielle, principalement afin d'éviter de surcharger les stations d'épuration (ce qui augmenterait le coût de traitement). On parle de *réseau séparatif*. Les eaux pluviales sont infiltrées dans le sol ou déversées dans leur exutoire naturel (réseau 1 sur la figure 5). Les eaux usées doivent subir un traitement en plusieurs étapes (réseau 2 sur la figure 5):

- la filtration des éléments grossiers à l'aide d'une grille (opération n° 3 sur la figure 5);
- la décantation des éléments plus fins (sable), des graisses et des huiles par sédimentation/séparation dans un bassin (opérations n° 4 et 5 sur la figure 5). On parle de *désablage*;
- la décantation dite primaire des boues par sédimentation (opération n° 6 sur la figure 5);
- la dégradation biologique;
- la décantation dite secondaire par sédimentation des floccs;
- la filtration des micro-polluants.

Les boues des stations d'épuration sont soit incinérées, soit utilisées pour la production de biogaz ou de fertilisants (opérations n° 7 et 8 sur la figure 5).

Problème considéré. Dans ce problème, on va s'intéresser à la décantation du sable (opération n° 4 sur la figure 5). On considère donc un bassin de forme rectangulaire avec un fond horizontal:

- L'eau arrive par une conduite de diamètre D à la station d'épuration avec un débit constant Q ; c'est un écoulement à surface libre.
- L'eau transporte du sable et des huiles qu'il faut décanter dans un bassin.
- Ce bassin est de forme rectangulaire de longueur L et de largeur ℓ . Il est fermé par un seuil (de largeur $W < \ell$ et pelle p).
- L'eau se déverse par le seuil.

On étudie donc l'arrivée, le transit et la sortie de l'eau de ce bassin de décantation.

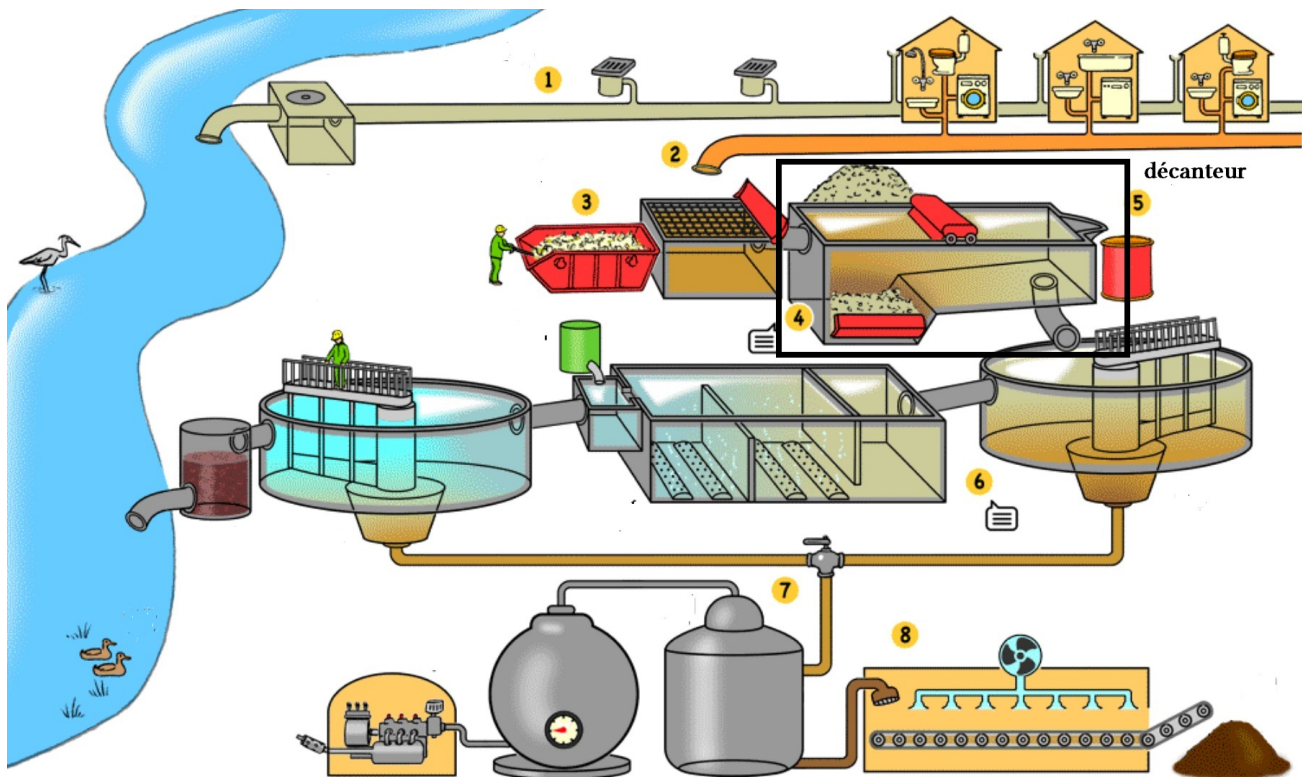


Figure 5 – Schéma de principe du fonctionnement d'une station d'épuration. Source : [Services cantonaux de l'énergie et de l'environnement](#) . La partie étudiée dans ce problème est le décanteur de désablage entouré par un cadre noir (opération n° 4).

Valeurs numériques. Pour les applications numériques on utilisera les données suivantes :

- le diamètre de la canalisation $D = 120$ cm, pente $i = 1$ % et rugosité $K = 60 \text{ m}^{1/3} \cdot \text{s}^{-1}$ (coefficient de Strickler);
- le débit moyen arrivant dans la station d'épuration est $Q = 1 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$;
- le sable a un diamètre médian $d_s = 1$ mm et une masse volumique $\rho_s = 2700 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$;
- le bassin de décantation a une largeur $\ell = 5$ m (sa longueur L est à déterminer);
- le seuil a une largeur $W = 1$ m et une pelle $p = 2$ m. Il est dénuyé;
- le viscosimètre de Couette a un rayon intérieur $R_1 = 50$ mm et un rayon extérieur $R_2 = 51$ mm. Sa hauteur est $h = 10$ cm.

Formulaire. Nous suggérons d'utiliser l'équation de Haider–Levenspiel² pour calculer le coefficient de traînée :

$$C_d = \frac{24}{R}(1 + 0,1806R^{0,6459}) + \frac{0,42151}{1 + 6880,95/R}, \quad (1)$$

avec le nombre de Reynolds particulaire R :

$$R = \frac{wd}{\nu}.$$

où w est la vitesse relative de la particule par rapport au fluide.

La figure 6 montre la variation du coefficient de traînée C_d avec le nombre de Reynolds particulaire R . On montre également des données expérimentales obtenues avec des particules irrégulières par Dioguardi et ses collègues³.

Questions.

- (1) [0,4] Calculez la hauteur d'eau normale dans la conduite d'amenée des eaux.
- (2) [0,4] Calculez la vitesse de sédimentation des particules. Pensez-vous que l'équation (1) surestime ou sous-estime la vitesse de sédimentation ?
- (3) [0,4] Calculez la charge hydraulique à l'amont immédiat du seuil, puis la hauteur et la vitesse de l'eau dans le bassin de décantation en considérant que la charge hydraulique est donnée par l'équation du seuil dénoyé (sans perte de charge).
- (4) [0,4] Calculez le temps de sédimentation et en déduire la longueur minimale L du bassin de décantation définie de telle sorte qu'en moyenne, une particule a le temps de sédimenter avant d'atteindre le seuil.
- (5) [0,4] On cherche à caractériser la viscosité et la masse volumique de l'huile qui remonte à la surface du bassin de décantation. On commence par prélever un volume $V = 30 \text{ cm}^3$, puis on le place dans un tube en U ouvert à ses deux extrémités [voir figure 7(a)], qui contient de l'eau. On mesure une différence de niveau $\Delta h = 3 \text{ cm}$. En déduire la masse volumique de l'huile.

2. Haider, A., and O. Levenspiel, Drag coefficient and terminal velocity of spherical and nonspherical particles, *Powder technology*, **58**, 63–70, 1989.

3. Dioguardi F., D. Mele, et P. Dellino, A new one-equation model of fluid drag for irregularly shaped particles valid over a wide range of Reynolds number, *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, **123**, 144–156, 2018.

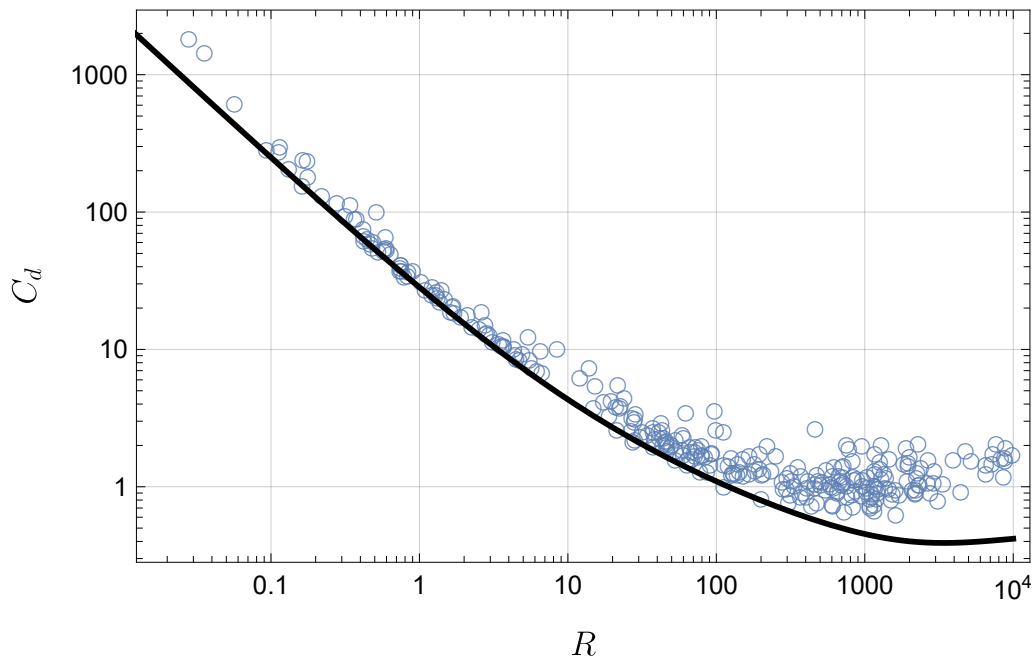


Figure 6 – Variation du coefficient de traînée de particules irrégulières. La courbe continue montre l'équation empirique (1). Nous montrons aussi les données issues des mesures de Dioguardi *et col.*.

- (6) [0,4] On place ensuite de l'huile dans l'entrefer d'un viscosimètre de Couette, c-à-d. un système composé de deux cylindres coaxiaux [voir figure 7(b)], dont le cylindre intérieur tourne à la vitesse Ω . Ce cylindre est équipé d'une jauge qui mesure le couple exercé par le fluide sur lui. L'entrefer est rempli de fluide sur toute la hauteur h . Le viscosimètre tourne à la vitesse $\Omega = 1 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$. On mesure un couple $C = 1,2 \text{ N}\cdot\text{mm}$. Donnez l'expression théorique du couple exercé par le fluide sur le cylindre intérieur pour un fluide newtonien de viscosité dynamique μ . En déduire la viscosité cinématique ν de l'huile. Indice: comme l'entrefer $e = R_2 - R_1$ est petit (devant R_1), on peut supposer en première approximation que le profil de vitesse est linéaire dans l'entrefer.

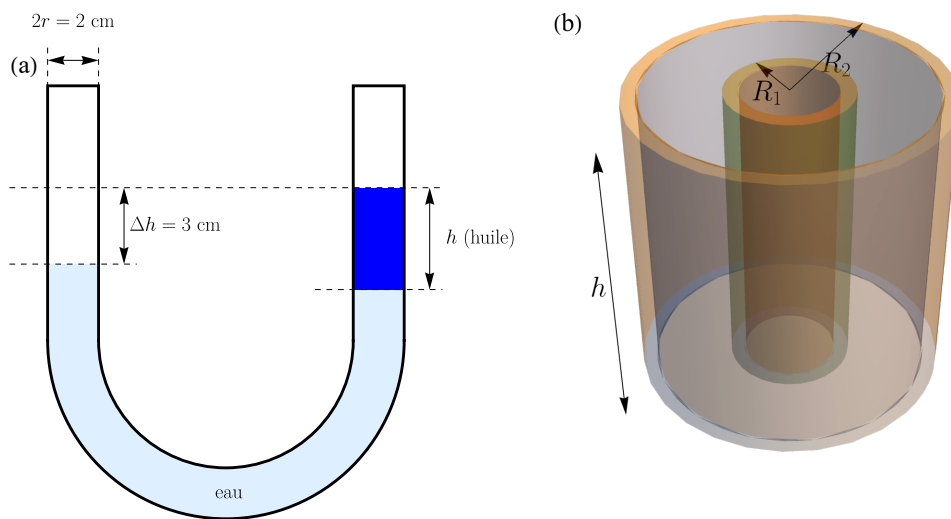


Figure 7 – (a) Mesure de la masse volumique de l’huile dans un tube en U (ouvert à ses extrémités). (b) Viscosimètre de Couette. Les dessins ne sont pas à l’échelle.