

## Corrigé détaillé de l'examen

Professeur responsable : Christophe ANCEY

### Problème 1

#### Question (1)

Comme le train se déplace à vitesse constante, on se place dans un référentiel galiléen attaché au train. La vitesse relative du vent est  $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}$ . On compte dans ce problème  $p = 7$  variables indépendantes exprimées dans  $r = 3$  unités physiques : la vitesse  $w = |\boldsymbol{w}|$ ,  $F = |\boldsymbol{F}|$  [kg m s<sup>-2</sup>] (comme on connaît sa direction, seule la norme entre dans le décompte), la surface et hauteur de la rame  $A$  [m<sup>2</sup>] et  $h$  [m] (il est inutile de préciser la longueur puisqu'elle est fixée par  $A$  et  $h$ ), l'angle d'incidence  $\psi$  [°], la masse volumique et la viscosité dynamique de l'air  $\rho$  [kg m<sup>-3</sup>] et  $\mu$  [kg m<sup>-1</sup> s<sup>-1</sup>]. On peut former 4 nombres sans dimension. Le problème est très proche de celui de la sédimentation d'une sphère dans un liquide. En s'inspirant de ce résultat, on peut écrire

$$\frac{F}{\rho w^2 A} = f(Re, A/h^2, \psi) \text{ avec } Re = \frac{\rho w h}{\mu}.$$

#### Question (2)

Toujours par analogie avec la force de traînée d'une sphère, on introduit le coefficient de traînée

$$C_d(Re, A/h^2, \psi) = \frac{F}{\frac{1}{2}\rho w^2 A}$$

Comme d'habitude on définit le coefficient de traînée par rapport à la surface apparente  $A$  et l'inertie du fluide  $\rho w^2/2$ .

**Question (3)**

À grand nombre de Reynolds, le coefficient de traînée devient indépendant du nombre de Reynolds. On peut aussi considérer que  $A/h^2$  est un facteur de forme, et que la force exercée par le vent n'en dépend pas. Au final, on retient une dépendance  $C_d(\psi)$ . Pour un problème de vent latéral qui est au cœur du problème, il faut probablement considérer que l'on s'intéresse uniquement à la force dans la direction  $y$  et alors

$$F_y = \frac{1}{2} C_d \rho w^2 A.$$

**Question (4)**

Le profil de vitesse était uniforme, le point d'application de la force est  $h/2$  par rapport au sol. Le moment de force est donc :

$$M_{O,F} = \frac{h}{2} F_y = C_d \frac{h}{4} \rho w^2 A.$$

Comme la masse est uniformément répartie, le point d'application du poids  $P$  est le centre de gravité, et le bras de levier est donc  $W/2$  :

$$M_{O,P} = -\frac{W}{2} P = -\frac{W}{2} mg.$$

En quasi-statique, l'équilibre des moments nous fournit

$$C_d \frac{h}{4} \rho w^2 A = \frac{W}{2} mg,$$

La vitesse relative du vent nécessaire à un basculement est donc

$$w_{cr}^2 = \frac{2}{C_d} \frac{W}{h} \frac{m}{\rho A} g,$$

et si on introduit une masse volumique moyenne du train  $\rho_t = m/(WA)$ , on a

$$w_{cr} = \sqrt{\frac{2}{C_d} \frac{W}{h} \frac{\rho_t}{\rho} W g},$$

**Question (5)**

On trouve  $W_{cr} = 42,9$  m/s soit encore 154 km/h.

Le modèle a des hypothèses qu'on pourrait améliorer :

- considérer un vent avec un profil plus réaliste, p. ex. logarithmique ;
- un vent tempétueux souffle en rafale. Il faudrait caractériser ces rafales (intensité, durée, fréquence) et voir en quoi le calcul est changé. Cela doit amener à se poser la question du temps durant lequel la rafale doit souffler pour ébranler l'équilibre du train ;
- prendre en compte le roulement du train (bogie et essieu). Le basculement se fait au niveau des roues ;
- déterminer la dépendance  $C_d(\psi)$  ;
- prendre en compte l'écoulement d'air sous la rame.

**Problème 2****Question (1)**

La hauteur normale s'obtient en égalant force de frottement et composante motrice de la gravité :

$$\chi\tau_p = \rho g S i,$$

et comme on utilise la loi de Manning-Strickler, il vient :

$$\chi \frac{\rho g}{K^2} \frac{\bar{u}^2}{R_h^{1/3}} = \rho g S i,$$

et après élimination, on obtient une équation implicite

$$Q^2 = K^2 S^{10/3} \chi^{-4/3} i. \quad (1)$$

**Question (2)**

Le calcul de la surface mouillée a été vu en cours. On considère une surface infinitésimale

$$dS = 2R \sin \theta \times dz \quad (2)$$

avec :

$$z = R \cos \theta \text{ et } dz = -R \sin \theta d\theta.$$

L'angle  $\theta$  est donné par

$$\theta = \arccos \left( 1 - \frac{h}{R} \right).$$

L'intégration donne

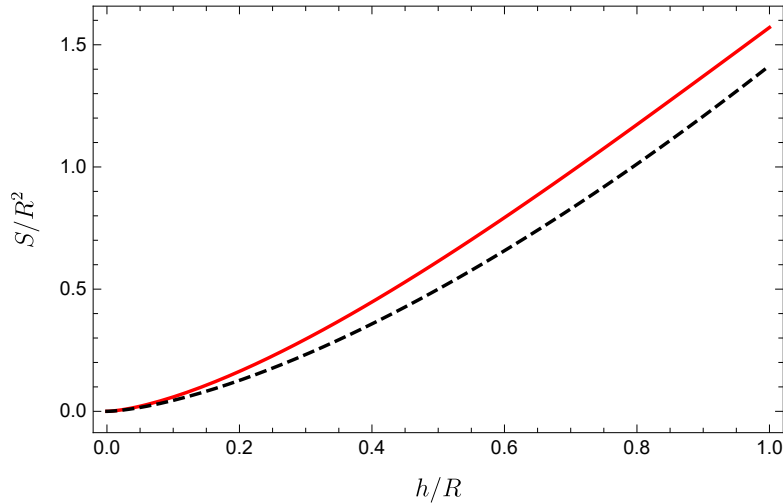
$$S = R^2(\theta - \cos \theta \sin \theta).$$

$S$  et  $\tilde{S}$  sont deux fonctions croissantes de  $h$ , qui sont nulles pour  $h = 0$  et atteignent les valeurs maximales respectives (pour  $\theta = \pi/2$ ) :

$$S_{max} = \frac{\pi}{2}R^2 \text{ et } \tilde{S}_{max} = \sqrt{2}R^2.$$

L'erreur relative maximale commise est donc :

$$\epsilon = 1 - \frac{\frac{\pi}{2}R^2}{\sqrt{2}R^2} = 1 - \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx -11 \text{ \%}.$$



**Figure 1** : variation de  $S$  (trait continu) et  $\tilde{S}$  (trait discontinu) en fonction de  $h$ . Les variables ont été adimensionnalisées.

On pourrait obtenir une meilleure approximation de la surface mouillée en faisant un développement limité à l'ordre 2. En effet, on a

$$\arccos x = \sqrt{2}\sqrt{x} + \frac{x^{3/2}}{6\sqrt{2}} + O(x^{5/2}),$$

et

$$\sqrt{x(2-x)} = \sqrt{2}\sqrt{x} - \frac{x^{3/2}}{2\sqrt{2}} + O(x^{5/2}).$$

On montre ainsi en posant  $\xi = h/R$  que

$$S = \frac{4}{3}\sqrt{2}R^2\xi^{3/2} + O(\xi^{5/2}) = \frac{4}{3}\sqrt{2Rh^3} + O(\xi^{5/2}).$$

Ce développement est plus précis pour  $h \rightarrow 0$ , mais il l'est moins pour  $h \rightarrow R$  (l'erreur atteignant 20 %).

### Question (3)

La charge spécifique est

$$H_s = h + \frac{Q^2}{2gS^2}.$$

Comme  $S \propto \sqrt{h}$ , on a  $H_s \propto h^{-1}$  quand  $h \rightarrow 0$  (domaine supercritique) et  $H_s \propto h$  quand  $h \rightarrow \infty$  (domaine subcritique). Il existe un minimum de  $H_s$  atteint quand la dérivée de  $H_s$  s'annule :

$$\frac{dH_s}{dh} = 1 - \frac{2Q^2}{2gS^3} \frac{dS}{dh} = 0 \Rightarrow 1 = \frac{Q^2}{gS^3} \frac{dS}{dh}.$$

On peut transformer cette égalité en introduisant le nombre de Froude

$$Fr^2 = \frac{Q^2}{gS^3} \frac{dS}{dh}. \tag{3}$$

La hauteur  $h_c$  qui vérifie  $Fr = 1$  est la hauteur critique. C'est une équation implicite.

**Question (4)**

Avec  $\tilde{S} = \sqrt{Dh^3}$ , on a d'après (1) et le développement asymptotique  $\theta = \arccos(1 - h/R) = \sqrt{2h/R}$  pour  $h \ll R$  (l'erreur commise quand  $h \rightarrow R$  est de l'ordre de 10 %):

$$Q^2 = K^2 S^{10/3} \chi^{-4/3} i \approx K^2 i \frac{(2Rh^3)^{5/3}}{(2hR)^{2/3}}$$

En regroupant les puissances de  $h$ , on déduit

$$\frac{Q^2}{2K^2 i R} = h_n^{13/3}$$

On obtient la solution recherchée

$$h_n = \left( \frac{Q^2}{2K^2 i R} \right)^{3/13}. \quad (4)$$

Pour la hauteur critique, on a moins de travail. D'après (3) et en servant toujours de  $\tilde{S} = \sqrt{Dh^3}$ , on a

$$Fr^2 = 1 = \frac{Q^2}{g(2Rh^3)^{3/2}} \frac{3}{2} (2Rh)^{1/2} = \frac{3}{4} \frac{Q^2}{gRh^4}.$$

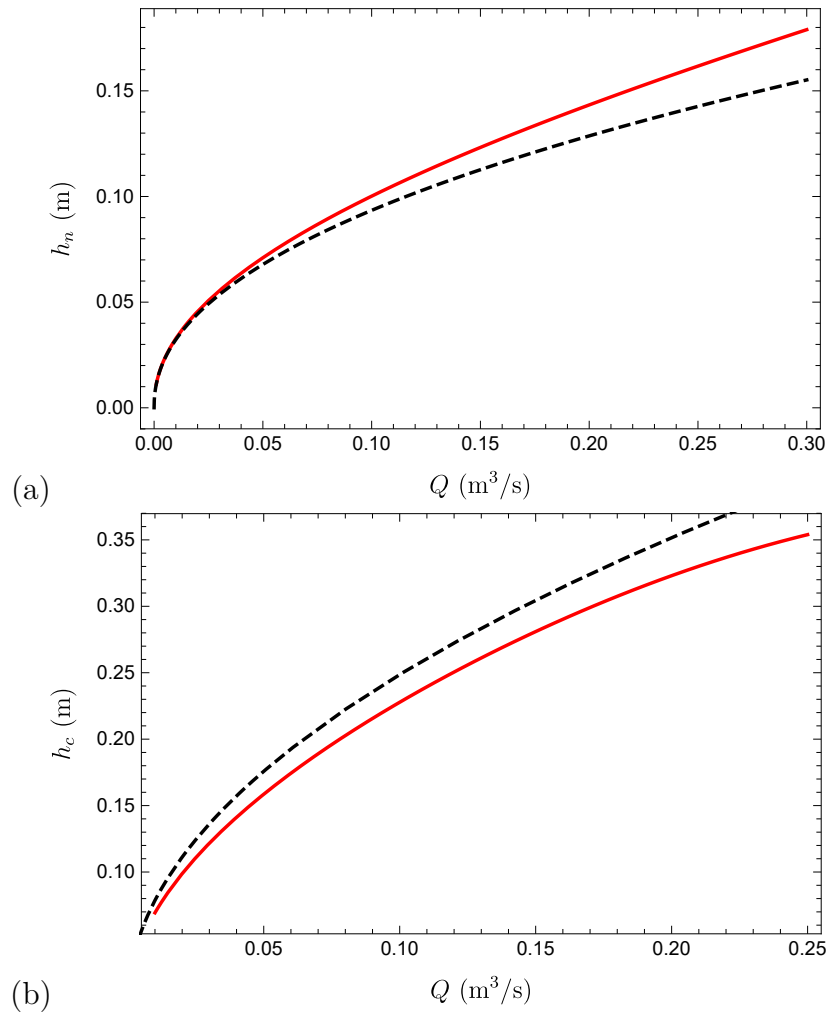
On en déduit une approximation de la hauteur critique

$$h_c = \left( \frac{3}{4} \frac{Q^2}{gR} \right)^{1/4}. \quad (5)$$

Comme le montre la figure 2, l'approximation  $\tilde{S} = \sqrt{Dh^3}$  permet d'obtenir les hauteurs normale et critique avec une erreur relative maximale de 13 % pour la gamme de débits testés.

**Question (5)**

On fait l'application numérique et on trouve:  $h_n = 13$  cm,  $h_c = 35$  cm. La résolution des équations implicites (1) et (3) donne  $h_n = 14,3$  cm,  $h_c = 32$  cm. Le régime est supercritique puis que  $h_n < h_c$ . L'ordre de grandeur



**Figure 2** : variation de la hauteur normale  $h_n$  et de la hauteur critique  $h_c$  en fonction du débit  $Q$ . Les courbes continues sont les solutions aux équations implicites (1) et (3), respectivement, et les courbes en tireté sont les solutions approchées (4) et (5).

de l'incertitude est 10 %. L'écart entre  $h_n$  et  $h_c$  est un ordre de grandeur supérieur à cette incertitude, donc même en résolvant les équations implicites (1) et (3), le régime ne changera pas de nature. En régime supercritique, la condition à la limite se place à l'amont.

Le nombre de Froude vaut :

$$Fr = \sqrt{\frac{3}{4} \frac{Q^2}{gRh^4}} = 7,3.$$

**Question (6)**

En régime permanent, la charge s'écrit

$$H = z + h + \frac{Q^2}{2gS^2}.$$

En différentiant par rapport à  $x$ , on obtient

$$\frac{dH}{dx} = \frac{dz}{dx} + \frac{dh}{dx} - 2 \frac{Q^2}{2gS^3} \frac{dS}{dx},$$

soit encore, après introduction de la pente d'énergie  $j_f$  et de la pente du fond  $i$  :

$$\frac{dH}{dx} = -j_f = -i + \frac{dh}{dx} - \frac{Q^2}{gS^3} \frac{dS}{dh} \frac{dh}{dx}.$$

On reconnaît le nombre de Froude (3), et on peut écrire :

$$\frac{dh}{dx} = \frac{i - j_f}{1 - Fr^2}.$$

Avec l'approximation  $\tilde{S} = \sqrt{Dh^3}$  et les expressions approchées (4) et (5) des hauteur normale et critique, on a

$$\frac{dh}{dx} = i \frac{1 - \frac{\bar{u}^2}{iK^2R_h^{4/3}}}{1 - \frac{3}{4} \frac{Q^2}{gRh^4}}.$$

Si on considère le numérateur, on a

$$\frac{\bar{u}^2}{iK^2R_h^{4/3}} = \frac{S_n^{10/3}}{S^{10/3}} \frac{\chi_h^{4/3}}{\chi_n^{10/3}},$$



où  $s_n$  et  $\chi_n$  sont les surface et périmètre mouillés. En servant de l'équation (4), on peut simplifier

$$\frac{S_n^{10/3}}{\chi_n^{4/3}} = 2Rh_n^{13/3}.$$

On peut fait de même pour les autres termes et on trouve finalement

$$\frac{dh}{dx} = i \frac{1 - (h_n/h)^p}{1 - (h_c/h)^q},$$

avec  $p = 13/3$  et  $q = 4$ .

### Question (7)

Le calcul de la force de pression nécessite de reprendre les éléments de calcul vus à la question (b). La force infinitésimale de pression s'écrit :

$$d\mathbf{F}_p = -p(z)\mathbf{n}dS,$$

avec  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_x$  la normale à  $S_0$ ,  $p = \rho g(h_0 - z')$  la pression hydrostatique, et  $dS$  donné par (2) :  $dS = 2R^2 \sin^2 \theta d\theta$ . On a  $z = R \cos \theta$  (position par rapport à l'axe de la conduite) et  $z' = R - z$  (position par rapport au fond de la conduite). On a donc en projection sur l'axe  $x$

$$dF_p = 2\rho g R^2 (h_0 - R + R \cos \theta) \sin^2 \theta d\theta,$$

que l'on intègre sur  $[0, \theta_0]$  avec  $\theta_0 = \arccos(1 - h_0/R)$ . L'intégration donne

$$F_p = \frac{1}{3} \rho g R^3 \left( 2 \sin^3(\theta) + 3(\xi - 1)(\theta - \sin(\theta) \cos(\theta)) \right),$$

avec  $\xi = h/R$  et  $\theta = \arccos(1 - h/R)$ . On peut aussi tout mettre en fonction de  $\theta$

$$F_p = \frac{1}{12} \rho g R^3 (9 \sin \theta + \sin(3\theta) - 12\theta \cos \theta), \tag{6}$$

ou bien de  $\xi$

$$F_p = \frac{1}{3} \rho g R^3 \left( \sqrt{(2 - \xi)\xi} (\xi^2 - 2\xi + 3) + 3(\xi - 1) \cos^{-1}(1 - \xi) \right) \tag{7}$$

Comme le montre l'analyse rapide de (6),  $F_p$  est une fonction croissante de  $\theta$  ( $F_p \propto \theta^5$ ). L'erreur est donc maximale quand  $\theta = \Pi/2$ , et on trouve alors que

$$F_p = \frac{2}{3} \rho g R^3,$$

alors que l'approximation proposée dans l'énoncé donne

$$\tilde{F}_p = \frac{3}{4} \rho g R^3,$$

soit une erreur relative de 12,5 %. L'approximation semble correcte. On peut réitérer cela en deux ou trois points pour vérifier que l'approximation est correcte.

On peut le démontrer de façon plus rigoureuse en faisant un développement limité à l'ordre 3 en  $\xi = 0$  de (7) donne

$$F_p = \frac{8}{15} \sqrt{2} \xi^{5/2} \rho g R^3 + O(\xi^{7/2}) \tag{8}$$

et une application numérique montre que

$$\frac{8}{15} \sqrt{2} = 0,7542 \approx \frac{3}{4}.$$

On va donc pouvoir se servir de l'approximation de la force de pression sur  $S_0$  :

$$\tilde{F}_p = \frac{3}{4} \xi^{5/2} \rho g R^3 \tag{9}$$

avec  $\xi_0 = h_0/R$ . La figure 3 montre le bon accord entre solution théorique et approximation.

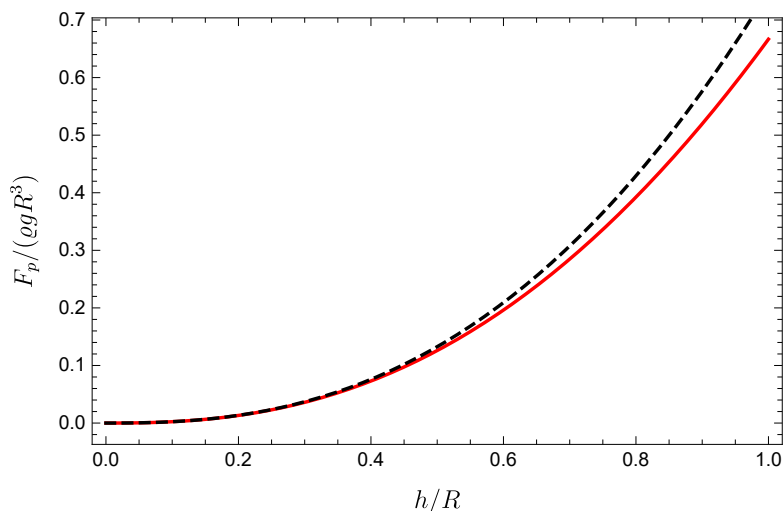
**Question (8)**

La projection du flux de quantité de mouvement à travers  $S_0$  s'écrit

$$\Phi_0 = \int_{S_0} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_x (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS = \rho u_0^2 S_0,$$

puisque la vitesse est uniforme. La conservation du débit impose :  $u_0 = Q/S_0$ . D'où le résultat demandé

$$\Phi_0 = \rho \frac{Q^2}{S_0},$$



**Figure 3** : variation de la force de pression  $F_p$  en fonction de la hauteur  $h$  : calcul exact représentant (7) (trait continu) et approché (8) (trait discontinu).

et en se servant de l'approximation  $\tilde{S}_0 = \sqrt{2Rh_0^3}$ , on déduit

$$\tilde{\Phi}_0 = \varrho \frac{Q^2}{\tilde{S}_0} = \varrho \frac{Q^2}{\sqrt{2Rh_0^3}}. \quad (10)$$

### Question (9)

Comme les hypothèses sont identiques à celles utilisées pour la question (8), on déduit immédiatement

$$\Phi_e = \varrho \frac{Q^2}{S_e},$$

et en se servant de l'approximation  $\tilde{S}_e = \sqrt{2Rh_e^3}$ , on déduit

$$\tilde{\Phi}_e = \varrho \frac{Q^2}{\tilde{S}_e} = \varrho \frac{Q^2}{\sqrt{2Rh_e^3}}. \quad (11)$$

**Question (10)**

La conservation de la quantité de mouvement s'écrit

$$\frac{d}{dt} \int_V \varrho \mathbf{u} dV + \int_S \varrho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS = \varrho V \mathbf{g} + \int_S \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (12)$$

et donc en projetant sur  $x$ , en considérant un régime permanent (donc pas de terme d'accélération) et les hypothèses de l'énoncé, on aboutit à une équation relativement simple

$$F_p + \Phi_0 = \Phi_e. \quad (13)$$

On peut simplifier cette équation à l'aide des approximations (9), (10) et (11) vues précédemment :

$$\tilde{F}_p + \tilde{\Phi}_0 = \tilde{\Phi}_e,$$

soit encore

$$\frac{3}{4} \xi^{5/2} \varrho g R^3 + \varrho \frac{Q^2}{\sqrt{2Rh_0^3}} = \varrho \frac{Q^2}{\sqrt{2Rh_e^3}}.$$

On divise cette équation par  $\tilde{F}_p$  :

$$1 + \frac{4}{3} \frac{Q^2}{gR^3 \sqrt{2Rh_0^3 \xi^{5/2}}} = \frac{4}{3} \frac{Q^2}{gR^3 \sqrt{2Rh_e^3 \xi^{5/2}}}.$$

Comme on a  $\xi_0 = h_0/R$ , on peut tout exprimer en fonction de  $h_0$  :

$$1 + \frac{4}{3} \frac{Q^2}{gR\sqrt{2h_0^4}} = \frac{4}{3} \frac{Q^2}{gR\sqrt{2h_e^4}} \left( \frac{h_0}{h_e} \right)^{3/2}.$$

On identifie le nombre de Froude donné dans l'énoncé et trouvé également à la question (4), et cela nous conduit à

$$1 + \frac{16}{9\sqrt{2}} Fr_0^2 = \frac{16}{9\sqrt{2}} Fr_0^2 Y^{-3/2}.$$

Le résultat est immédiat

$$Y = \left( \frac{\frac{16}{9\sqrt{2}} Fr_0^2}{1 + \frac{16}{9\sqrt{2}} Fr_0^2} \right)^{2/3}.$$

Soit encore, après réarrangement des termes :

$$Y \approx \left( \frac{Fr_0^2}{0,8 + Fr_0^2} \right)^{2/3} .$$

Avec les valeurs trouvées à la question (5), on trouve:  $Y = 0,99$ . C'est un résultat sans surprise : à grand nombre de Froude, la perturbation causée par la formation d'un jet est minimale. La figure 4 montre l'allure de la courbe  $Y$ .

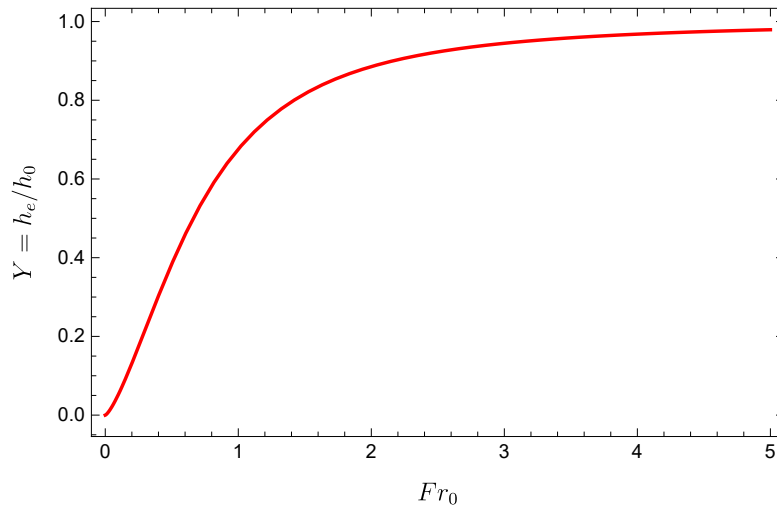


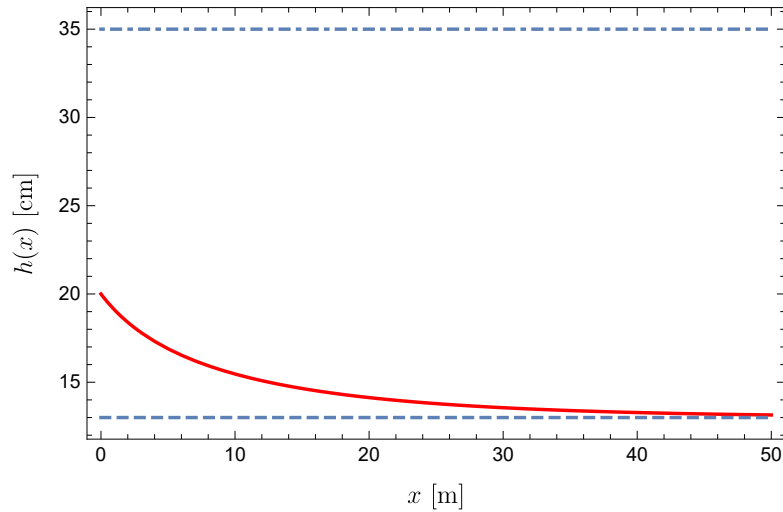
Figure 4 : variation de la  $Y$  en fonction du nombre de Froude  $Fr_0$ .

### Question (11)

On a un régime supercritique. La condition à la limite est donnée par l'amont. La condition initiale est entre les hauteurs normale  $h_n$  et critique  $h_c$ , donc la courbe de remous va tendre vers  $h_n$  (voir figure 5).

### Question (12)

Si la conduite est suffisamment longue et le régime supercritique, la hauteur d'eau à la sortie de la conduite est très proche de la hauteur normale. On peut donc calculer la courbe de débitance en servant de l'équation (4)



**Figure 5** : courbe de remous (trait continu) et hauteurs normale  $h_n$  (trait discontinu) et critique  $h_c$  (trait pointillé).

de la hauteur normale. Il s'agit d'une approximation précise à environ 10 %. Avec une simple règle, on peut mesurer la hauteur  $h_e$  et en déduire  $Q$  avec une précision de l'ordre de 10 %.