Conditions d'examen

Professeur responsable : Christophe ANCEY

Documentation autorisée : aucune documentation sauf formulaire A4

Matériel autorisé : aucun matériel électronique sauf calculatrice simple

Durée de l'examen : 3 h (8 h 15–11 h 15)

Date et lieu : mercredi 19 août 2020 de 8 h 15 à 11 h 00 – salle SG1

---

1. Lisez bien les données, tout ce dont vous avez besoin pour résoudre les exercices y figure (et parfois plus, il faudra faire le tri) !
2. **Écrivez vos nom et prénom(s) en lettres capitales.**
3. L'examen comporte deux problèmes, avec en tout 17 questions. Chaque question rapporte 0,40 point indépendamment de la difficulté. Le total des points est 6,80, donc vous n'êtes pas obligés de répondre à toutes les questions pour avoir la note maximale (autrement dit, il y a des questions bonus). Compte tenu du point de présence et de la règle des arrondis, il faut répondre à 13 questions sur 17 pour décrocher un 6 (et 8 sur 17 pour assurer un 4). Choisissez bien vos questions pour optimiser vos points.
4. **Aucun document n'est autorisé, à l'exception d'un formulaire recto-verso au format maximal A4. Une calculatrice scientifique (éventuellement graphique) est tolérée. Les appareils de type mini PC ou tout autre appareil permettant de communiquer et/ou stocker des données sont interdits. Un formulaire accompagne l'énoncé.**
5. **Le résultat des calculs devra être encadré et écrit de façon très lisible. Les calculs seront éventuellement joints sur des feuilles au propre.** Les feuilles mal écrites ou écrites avec un crayon papier seront considérées comme des brouillons et ne seront pas prises en compte ; **une pénalité de 0,40 (sur la note N) sera appliquée à la note de cet examen** pour ceux qui ne respecteront pas cette consigne. Pour les applications numériques, ne pas oublier les unités. Pensez à numéroter les pages et mettre vos noms sur chaque feuille.

Problème 1 Le 3 janvier 2018, le train de la Compagnie du Montreux-Oberland bernois (MOB) a déraillé à La Lenk dans le canton de Berne à cause du vent. Vous êtes l'ingénieur en charge de l'étude de la sécurité sur cette ligne. Dans cette étude, on s'intéresse à la stabilité d'un train soumis à un vent latéral.

Figure 1 : déraillement d'une train du MOB. Source : 20 minutes.

On emploie les variables suivantes :

- force de traînée $\boldsymbol{F}$ exercée par le vent sur la face latérale du train ;
- géométrie du train : surface latérale A et hauteur h ;
- vitesse du vent $\boldsymbol{u}$ et angle d'incidence par rapport à la direction de la ligne de train ψ ;
- vitesse du train $\boldsymbol{v}$;
- masse volumique et viscosité dynamique de l'air ϱ et μ.

On traitera le problème de stabilité comme un problème quasi-statique. On supposera que $\boldsymbol{F}$ et $\boldsymbol{u}$ sont colinéaires. Le profil du vent est uniforme. Il n'y a pas de changement de direction. On néglige l'action des rails sur le train.

(1) [0,40] Déterminer à l'aide de la méthode de votre choix (théorème de Vaschy-Buckingham, méthode de Rayleigh, etc.) les nombres adimen-

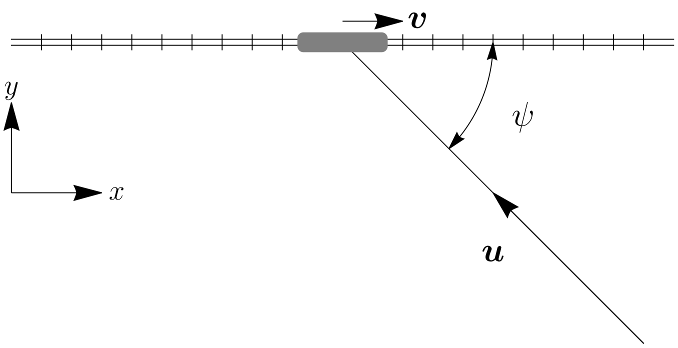

Figure 2 : avancée d'un train soumis à un vent.

sionnels du problème et comment s'écrit la dépendance entre la force de traînée adimensionnelle $\hat{\boldsymbol{F}}$ et les autres nombres sans dimension.

(2) [0,40] En déduire que l'on peut introduire un coefficient de traînée C_d qui permette de relier la force F_y exercée par le vent sur la face latérale du train en fonction des nombres sans dimension trouvés précédemment.

(3) [0,40] Pour quelles raisons ce coefficient C_d serait constant et indépendant de tout nombre sans dimension ?

(4) [0,40] On simplifie la géométrie de la rame en considérant que la section d'une rame (voiture et essieu) peut être remplacée par une section rectangulaire de largeur W et hauteur h ; voir figure 3. La masse est uniformément répartie. On néglige la force de frottement et de réaction du sol. Sous l'action d'un vent latéral créant une force F_y, la rame peut pivoter autour du point O. Faire le bilan des forces. À quelle hauteur par rapport au sol s'applique la force F_y ? Écrire le moment des forces en O. Pour quelle vitesse $|\boldsymbol{u}|$ (connaissant la vitesse du train et l'angle d'incidence du vent) le train se renverse-t-il sous l'effet d'un vent latéral de vitesse constante ?

(5) [0,40] Faire l'application numérique. Il s'agit d'un modèle très simple. Que feriez-vous pour améliorer le calcul de stabilité tout en restant dans le cadre de calculs réalisables à la main ?

Données numériques :

- coefficient de traînée $C_d = 2{,}0$;
- longueur $L = 42$ m ;

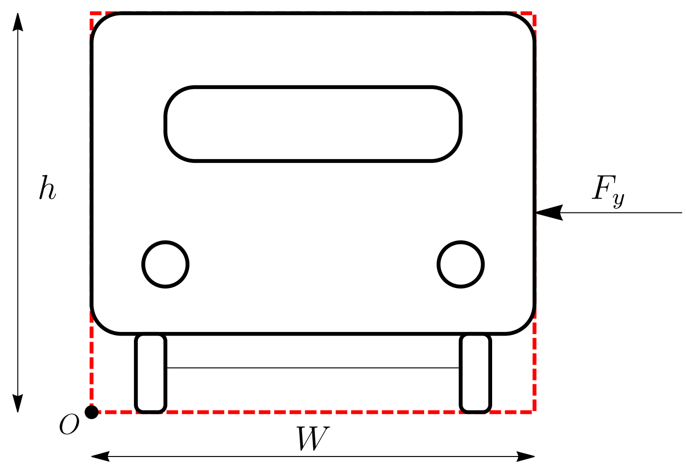

Figure 3 : renversement d'une rame de train. Le rectangle en tireté symbolise la section équivalente sur laquelle on fait le calcul de stabilité.

- largeur $W = 2{,}6$ m ;
- hauteur $h = 4$ m ;
- masse $m = 63$ t ;
- vitesse du vent : $u = 100$ km/h ;
- vitesse du train : $v = 100$ km/h ;
- angle d'incidence : $\psi = 90°$.

Problème 2 Vous travaillez pour le compte d'une commune de montagne qui souhaite créer un lac d'accumulation en détournant une partie du débit d'un torrent. Pour cela, une conduite de diamètre $D = 2R$, de longueur L, et de pente i est placée dans le torrent et capte une partie du débit transitant par le torrent. Un jet se forme à la sortie de la conduite. La question qui se pose à vous est de savoir comment déterminer le débit dévié dans la conduite avec des moyens rudimentaires.

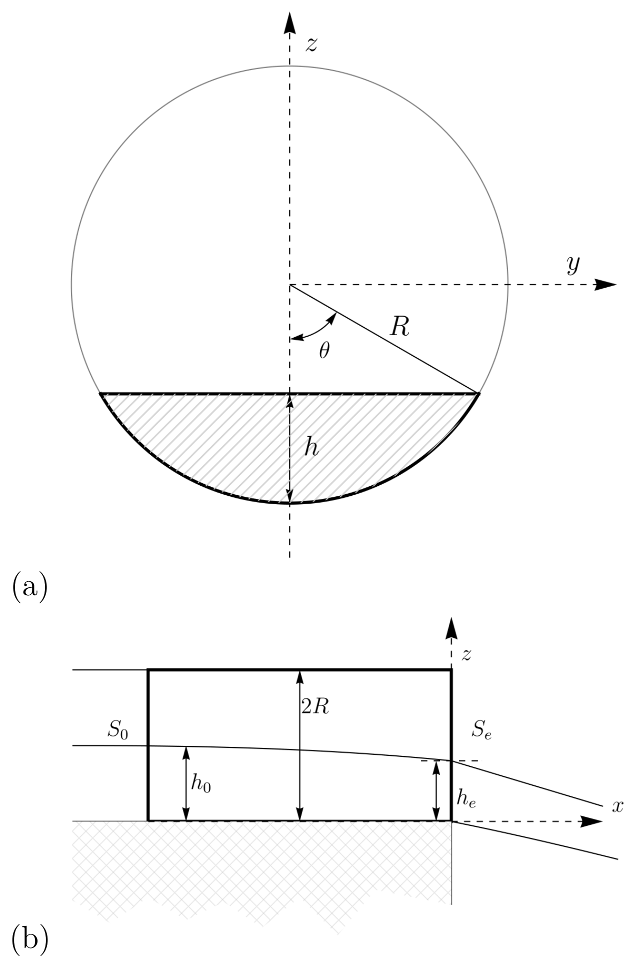

Figure 4 : géométrie de la conduite. (a) vue de face. (b) vue de côté ; le cadre noir représente le volume de contrôle pour le calcul.

On adoptera les notations usuelles du cours :

- périmètre mouillé χ, rayon hydraulique R_h, et section mouillée S ;
- vitesse moyenne $\bar{u} = Q/S$;
- θ l'angle que fait la surface libre par rapport à la verticale ;
- On appelle x la direction de l'écoulement.

On considère que dans la conduite, l'écoulement est à surface libre. Sur la plus majeure partie de la longueur, l'écoulement a une hauteur d'eau qui est égale à la hauteur normale h_n. La conduite est en acier avec un coefficient de Manning-Strickler K. On rappelle que cette loi s'écrit

$$\tau_p = \frac{\varrho g}{K^2} \frac{\bar{u}^2}{R_h^{1/3}}$$

Si on exprime la formule en termes de pente de frottement, cette loi s'écrit

$$j_f = \frac{\tau_p}{\varrho g R_h} = -\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}x} = \frac{\bar{u}^2}{K^2 R_h^{4/3}}$$

On considère que le taux de remplissage maximal est de 50 %, c.-à-d. que $\theta \leq \pi/2$ ou $h \leq R$ pour la gamme d'écoulements étudiés. Pour les applications numériques, on prendra les valeurs suivantes :

- $R = 20$ cm, $L = 50$ m, et $i = 10$ % ;
- $Q = 200$ L/s ;
- $K = 85$ m$^{1/3}$/s.

(1) [0,40] Quelle est l'expression de la hauteur normale en régime permanent ? (on se contentera de donner l'équation implicite vérifiée par la hauteur normale).

(2) [0,40] Calculer la relation entre section mouillée S, hauteur d'eau h, rayon R, et angle θ. Montrer qu'en première approximation, cette surface mouillée est voisine de $\tilde{S} = \sqrt{Dh^3}$. Quelle est l'erreur (relative) maximale commise ?

(3) [0,40] Écrire la définition de la charge spécifique H_s. On va s'inspirer ici de ce qu'on avait fait en cours pour établir la hauteur critique. Montrer qu'à débit constant, la fonction H_s admet un minimum, qui sépare deux domaines : le domaine supercritique et le domaine subcritique. Quelle est la définition de la hauteur critique ? (on se contentera de donner l'équation implicite vérifiée par la hauteur critique).

(4) [0,40] En vous servant de l'approximation $\tilde{S} = \sqrt{Dh^3}$ et du développement asymptotique au premier ordre $\arccos(1-x) = \sqrt{2x}$ quand $x \to 0$, calculer une approximation explicite des hauteurs critique et normale.

(5) [0,40] Faire l'application numérique. Caractériser le régime d'écoulement. Est-ce que ce résultat peut changer sachant que l'on a fait des approximations pour arriver à ce résultat ? Si on veut résoudre l'équation de la courbe de remous, où faut-il placer la condition aux limites ?

(6) [0,40] En vous inspirant de ce qu'on a vu en cours pour établir l'équation de la courbe de remous, déduire l'équation de la courbe de remous en différentiant l'équation de conservation de la charge H par rapport à x dans le cas d'un écoulement permanent. En vous servant de l'approximation $\tilde{S} = \sqrt{Dh^3}$ et des approximations trouvées précédemment pour les hauteurs normale et critique, écrire une approximation de l'équation de la courbe de remous pour une conduite circulaire inclinée sous la forme d'une équation de Bresse :

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} = i\frac{1-(h_n/h)^p}{1-(h_c/h)^q},$$

avec p et q deux coefficients à déterminer.

(7) [0,40] À la sortie de la conduite, un jet se forme. La pression qui était hydrostatique dans l'écoulement d'eau dans la conduite devient uniforme (en première approximation) et égale à la pression atmosphérique (cela sera utilisé à la question 9). On cherche à déterminer la hauteur d'eau h_e à l'exutoire de la conduite. On va pour cela appliquer le théorème de conservation de la quantité de mouvement (1) sur un volume de contrôle – voir figure 1(b) – pour un écoulement d'eau en régime permanent. Que vaut la résultante des forces de pression sur la face amont S_0 en supposant qu'on est suffisamment loin de l'exutoire et que la pression est hydrostatique (comme d'habitude on supposera que la pression ambiante est nulle) ? Montrer que cette force (sous forme algébrique) peut être approchée par l'expression :

$$\tilde{F}_p = \frac{3}{4}\varrho g\sqrt{Rh^5}.$$

(8) [0,40] Comment s'exprime le flux de quantité de mouvement Φ_0 (projeté le long de x)à travers S_0 en supposant le profil de vitesse uniforme ? En

vous servant de l'approximation $\tilde{S} = \sqrt{2Rh^3}$, proposez une approximation $\tilde{\Phi}_0$.

(9) [0,40] À l'exutoire de la conduite, il se forme un jet. La pression devient non hydrostatique sur la face S_e : $p \approx \varrho g(h-z) - \varrho g(h-z)^2/h$. Comme le montre la figure 5, la pression est plus faible que la pression hydrostatique. En conséquence, en première approximation, on va supposer que la pression est égale à la pression atmosphérique sur S_e et qu'en conséquence, la résultante des forces de pression sur S_e est nulle. Le profil de vitesse est également affecté dans la zone de transition « écoulement à surface libre » → « jet ». On va toutefois supposer qu'il est uniforme. Exprimez le flux de quantité de mouvement Φ_e et une approximation $\tilde{\Phi}_e$ en vous servant de $\tilde{S}$.

(10) [0,40] En vous servant de l'équation de la conservation de la quantité de mouvement (1), écrivez la relation (approchée) liant les flux de quantité de mouvement Φ_e et Φ_e à la force de pression F_p sur S_0 (on néglige : l'effet de la pesanteur, le frottement sur les parois, et la pression à l'exutoire). Simplifiez cette relation en introduisant le nombre de Froude à l'amont et le rapport de hauteur :

$$Fr_0^2 = \frac{3}{4}\frac{Q^2}{gRh_0^4} \text{ et } Y = \frac{h_e}{h_0}.$$

Faire une application numérique en supposant que $h_0 = h_n$.

(11) [0,40] Tracez la forme de la courbe de remous en prenant comme hauteur d'eau à l'entrée de la conduite : $h_i = 20$ cm.

(12) [0,40] Est-ce qu'en mesurant la hauteur d'eau h_e à l'exutoire on dispose d'un moyen commode et précis d'estimer le débit ? Quelle précision pensez-vous obtenir ?

Formulaire :

Le théorème de conservation de la quantité de mouvement appliqué à un volume de contrôle fixe V s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \varrho \boldsymbol{u} \mathrm{d}V + \int_S \varrho \boldsymbol{u}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})\mathrm{d}S = \varrho V \boldsymbol{g} + \int_S \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S, \tag{1}$$

où S est la surface enveloppant V, $\boldsymbol{n}$ est la normale à la surface de contrôle orientée de l'intérieur vers l'extérieur de V, $\boldsymbol{\sigma}$ est le tenseur des contraintes

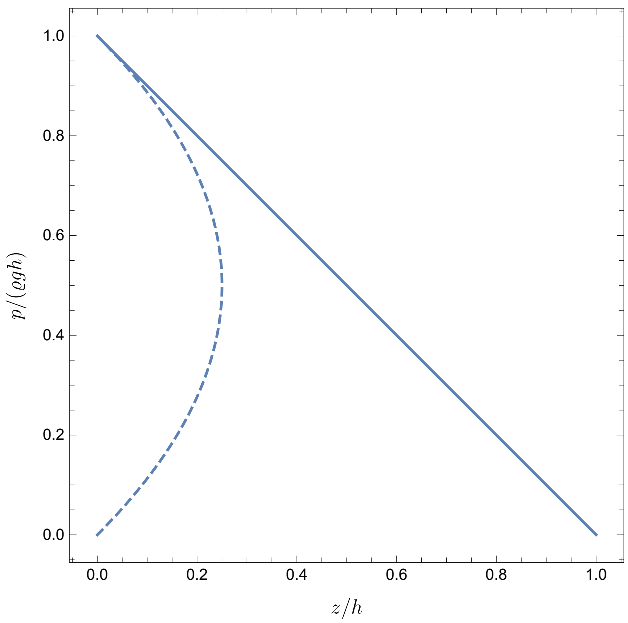

Figure 5 : profil (adimensionnalisé) de pression à l'exutoire de la conduite : profil hydrostatique (trait continu) et approximation d'un profil non hydrostatique (trait discontinu).

(pour un fluide parfait $\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{1}$ avec p la pression), et $\boldsymbol{u}$ est la vitesse matérielle du fluide. La conservation de la masse s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \varrho \mathrm{d}V + \int_S \varrho(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})\mathrm{d}S = 0.$$

Trigonométrie :

$$\int \sin^2\theta \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\sin(2\theta)$$

$$\int \cos\theta \sin^2\theta \mathrm{d}\theta = \frac{1}{3}\sin^3\theta$$