

Corrigé détaillé de l'examen

Professeur responsable : Christophe ANCEY

Problème 1

Question (a)

La pression hydrostatique : $p(z) = \rho g(h/2 - z)$ pour $-h/2 \leq z \leq h/2$.

Question (b)

Soit β l'angle de la normale $\mathbf{n} = (\cos \beta, \sin \beta)$. La résultante des forces de pression est définie comme étant

$$\mathbf{F} = - \int_{-\theta}^{+\theta} p \mathbf{n} dS,$$

avec $dS = WR d\theta$. Après substitution et comme $z = R \sin \beta$ et $h = 2R \sin \theta$, on trouve

$$\mathbf{F} = - \int_{-\theta}^{+\theta} \rho g(h/2 - z)(\cos \beta, \sin \beta)WR d\theta = -\rho gWR^2 \int_{-\theta}^{+\theta} (\sin \theta - \sin \beta)(\cos \beta, \sin \beta) d\theta$$

Soit finalement

$$\mathbf{F} = -\rho gWR^2 \begin{pmatrix} 2 \sin^2 \theta, \\ -\theta + \sin \theta \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Question (c)

Application numérique :

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} -196,2 \\ 55,99 \end{pmatrix} \text{ kN.}$$

Question (d)

La force infinitésimale de pression $d\mathbf{F}$ étant portée par \mathbf{n} , qui passe par le point O, le moment des forces est nul en O. C'est la raison pour laquelle les vannes-secteurs sont intéressantes : un moindre effort pour les actionner, mais également moins de vibrations (les forces sont transmises à l'axe du pivot), et elles retombent sous leur propre poids.

Question (e)

On applique le théorème de Bernoulli en faisant l'analogie avec la vidange d'une cuve vue en cours (formule de Torricelli), c.-à-d. le long d'une ligne de courant allant de la surface libre à l'amont de la vanne à la surface libre à l'aval. Les mêmes réserves s'appliquent que pour la formule de Torricelli : il faut que les surfaces libres restent à la même cote au cours du temps (hypothèse de régime permanent), que l'on puisse négliger la dissipation d'énergie en dépit de la forte constriction de la veine d'écoulement et on fait le calcul sur une courte distance (hypothèse d'écoulement non visqueux), et que la ligne de courant existe telle qu'on l'imagine. Il y a une différence avec la cuve : la vitesse du point de départ n'est pas nécessairement petite devant la vitesse de vidange.

On a donc pour deux points 1 et 2 à la surface libre de part et d'autre de la vanne

$$z_1 + p_1 + \frac{q^2}{2gh_1^2} = z_2 + p_2 + \frac{q^2}{2gh_2^2}.$$

On a $p_1 = p_2 = 0$, et, avec la notation de l'énoncé, on déduit immédiatement

$$h + \frac{q^2}{2gh^2} = d + \frac{q^2}{2gd}$$

soit après réarrangement des termes, on trouve le résultat demandé

$$q = dh\sqrt{\frac{2g}{d+h}} \Rightarrow Q = Wq = Wdh\sqrt{\frac{2g}{d+h}}. \quad (2)$$

$$\text{A.N. : } q = 3,55 \text{ m}^2/\text{s}, Q = 17,75 \text{ m}^3/\text{s}.$$

Question (f)

En régime permanent, la conservation de la masse s'écrit

$$\int_S \rho(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS = 0,$$

tandis que la conservation de la quantité de mouvement s'écrit

$$\int_S \rho \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS = \rho V \mathbf{g} + \int_S \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dS,$$

Question (g)

La projection de la conservation de la masse sur l'axe x s'écrit par unité de largeur

$$u_1 h_1 = u_2 h_2 \Rightarrow q = u_1 h = u_2 d,$$

tandis que la conservation de la quantité de mouvement s'écrit

$$\rho u_1^2 h_1 - \rho u_2^2 h_2 = \frac{1}{2} \rho g h_2^2 - \frac{1}{2} \rho g h_1^2 + \frac{N}{W}.$$

On déduit après substitution que N est une fonction de q , h et d

$$\frac{N}{W} = \rho \left(-q^2 \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{h} \right) + \frac{g(h^2 - d^2)}{2} \right). \quad (3)$$

Question (h)

Quand $q = 0$, on a nécessairement $d = 0$ et $u_2 = u_1 = 0$, donc

$$\frac{N}{W} = \frac{1}{2} \rho g h_1^2,$$

qui n'est rien d'autre que la force hydrostatique (1) trouvée précédemment à la question (b) en remplaçant $2R^2 \sin^2 \theta$ par $h^2/2$.

Question (i)

Le débit calculé à l'équation (2) est

$$q = dh\sqrt{\frac{2g}{d+h}}$$

et il peut s'exprimer comme une fonction de $\xi = d/h$

$$q^2 = d^2h^2\frac{2g}{d+h} = 2gh^3\frac{\xi^2}{\xi+1}.$$

En reportant cette expression dans l'équation (3) mise sous forme adimensionnelle, on trouve

$$\hat{N} = \frac{N}{\frac{1}{2}\rho g W h^2} = 1 - \xi^2 + 4\frac{\xi^2}{1+\xi} \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) = 1 - \xi^2 + 4\xi\frac{\xi-1}{1+\xi}. \quad (4)$$

Question (j)

Le débit défini dans l'énoncé

$$q = C_d d \sqrt{2gh} \quad (5)$$

peut s'exprimer comme une fonction de $\xi = d/h$

$$q^2 = 2gC_d^2h^3\xi^2.$$

En reportant cette expression dans l'équation (3), on obtient une relation proche du résultat précédent

$$\hat{N} = 1 - \xi^2 + 4C_d^2\xi(\xi-1). \quad (6)$$

Comme le montre la figure 1, les deux expressions sont similaires dans l'allure générale, mais les différences sont importantes pour $\xi \sim 0,5$ (l'écart atteint alors 100 %). Un développement limité à l'ordre 1 en $\xi = 0$ donne

$$\hat{N} \approx 1 - 4\xi$$

pour l'application de Bernoulli contre

$$\hat{N} \approx 1 - 4C_d^2\xi$$

pour la loi empirique et comme $C_d \approx 0,7$ (et donc $\hat{N} \approx 1 - 2\xi$), la pente varie d'un facteur 2 selon la méthode de calcul employé. Comme il n'y a pas de prise en compte de la perte de charge, le théorème de Bernoulli tend à surestimer la force N .

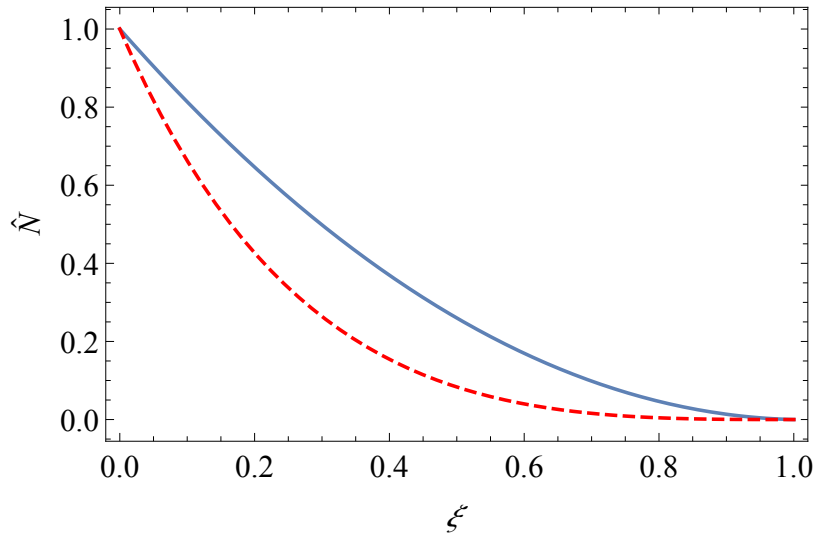


Figure 1 : variation de la force adimensionnelle \hat{N} obtenue en se servant du théorème de Bernoulli (courbe rouge en tireté) ou de la relation empirique (5) (courbe bleue).

Question (k)

On considère un canal par lequel transite un débit par unité de largeur $q = Q/W = 4 \text{ m}^2/\text{s}$. Comme ce canal est rectangulaire, la hauteur critique est

$$h_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} = 1,17 \text{ m.}$$

Avec une loi de Chézy et si on fait l'hypothèse un canal infiniment large, la hauteur normale est

$$h_n = \left(\frac{q^2}{C^2 \sin i} \right)^{1/3} = 0,96 \text{ m.} \quad (7)$$

Avec $h_n/W \approx 0,27$, on n'est pas vraiment dans le domaine de validité de l'approximation du canal infiniment large. Si on maintient cette hypothèse, on $h_n > h_c$ donc le régime à l'aval est supercritique. Comme initialement le régime est également supercritique puisque

$$\text{Fr} = \frac{q}{\sqrt{gd^3}} = 1,17.$$

Comme on a un régime supercritique, la courbe de remous – appelée équation de Bresse pour ces hypothèses – est

$$\frac{dh}{dx} = i \frac{1 - (h_n/h)^3}{1 - (h_c/h)^3}, \quad (8)$$

et elle est croissante le long du radier, partant de $h = d$ en $x = 0$ et tendant vers $h = h_n$ pour $x \rightarrow \infty$. Il n'est pas aisé de déterminer la vitesse de convergence, mais elle est lente. En effet, dans l'équation de Bresse (8), on a $h \sim h_n \sim h_c \sim 1$ m, donc le rapport est peu informatif. En revanche, il est pondéré par $i = 1/200$ et on peut s'attendre qu'il faille des distances $x \sim O(h)/i = 200$ m pour voir la convergence. L'intégration numérique confirme une lente convergence (voir figure 3). figure 3

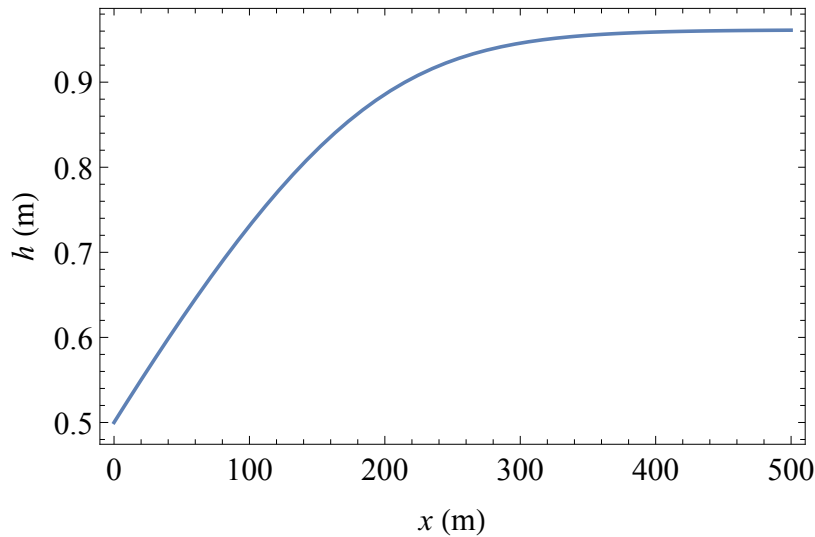


Figure 2 : courbe de remous solution de l'équation de Bresse (8).

Le calcul exact – sans approximation de canal large – nous dit que h_n est la solution implicite de

$$\frac{Wh_n^3}{W + 2h_n} \sin[i] = \frac{q^2}{c^2} \Rightarrow h_n = 1,08 \text{ m}, \quad (9)$$

qui est environ 10 % plus élevée que la valeur trouvée précédemment. Le

nombre de Froude associé à la hauteur normale

$$Fr(h_n) = \frac{q}{\sqrt{gh_n^3}} = 1,13.$$

contre $Fr = 1,17$ précédemment. Pour trouver la courbe de remous on résout l'équation pour un canal rectangulaire

$$\frac{dh}{dx} = \frac{i - j}{1 - Fr^2}, \tag{10}$$

avec $j = u^2/C^2/R_h$ la pente d'énergie et $R_h = Wh/(w + 2h)$ le rayon hydraulique. La courbe de remous a la même allure (voir figure 3), mais h tend vers une hauteur normale un peu plus grande.

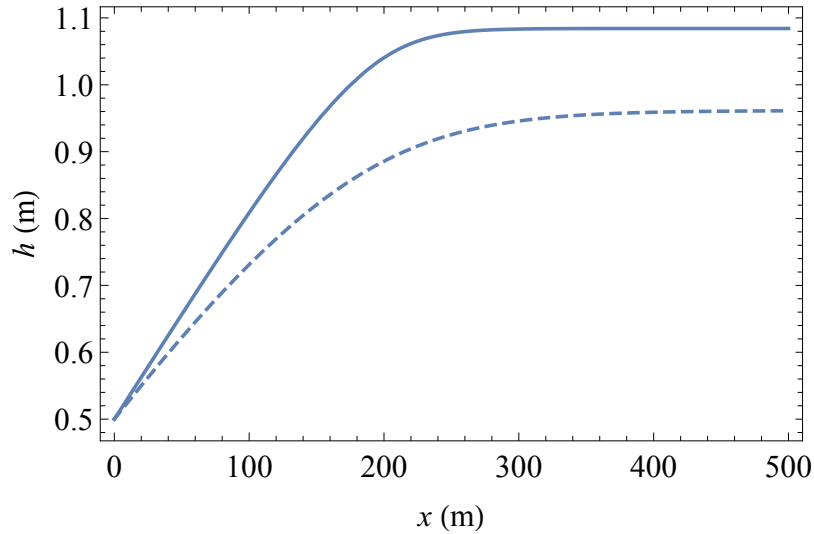


Figure 3 : courbe de remous: solution de l'équation de Bresse (8) (courbe en tireté).

Problème 2

Question (a)

Pendant un temps dt , la variation incrémentale de volume V du lac est

$$dV = Sdh = (Q_{in} - Q_{out})dt,$$

soit encore

$$S \frac{dh}{dt} = Q_{in} - Q_{out} = Q_{in} - C_d w d \sqrt{gd},$$

et comme $h = z_s + d$, on a aussi $dh = dd$. L'équation de conservation s'écrit finalement

$$S \frac{dd}{dt} = Q_{in} - C_d w d \sqrt{gd}. \quad (11)$$

Question (b)

On introduit les échelles de longueur et de temps

$$L_* = w \text{ et } T_* = \frac{Sw}{Q_{in}}.$$

et les variables adimensionnelles

$$\hat{d} = \frac{d}{L_*} \text{ et } \hat{t} = \frac{t}{T_*}.$$

L'équation (11) devient

$$\frac{d\hat{d}}{d\hat{t}} = Q_{in} - C_d \sqrt{gw^5} \hat{d}^{3/2},$$

soit après simplification

$$\frac{d\hat{d}}{d\hat{t}} = 1 - \Pi \hat{d}^{3/2} \text{ avec } \Pi = \frac{C_d \sqrt{gw^5}}{Q_{in}}. \quad (12)$$

Application numérique : $\Pi = 0,093$.

Question (c)

Quand t est grand, on peut supposer que l'équation (11) admet une solution asymptotique correspondant à $dd/dt = 0$. L'équation (11) devient

$$C_d w d_\infty \sqrt{gd_\infty} = Q_{in} \Rightarrow d_\infty = \left(\frac{Q_{in}}{C_d w \sqrt{g}} \right)^{2/3}. \quad (13)$$

Application numérique : $d_\infty = 4,8 \text{ m}$.

Question (d)

Comme Π est petit, on peut négliger le terme $\Pi \hat{d}^{3/2}$ dans l'équation (12)

$$\frac{d\hat{d}}{d\hat{t}} = 1,$$

dont l'intégration est triviale: $\hat{d} = \hat{t}$ compte tenu de la condition initiale. (On a donc $A = 1$.) Donc aux petits temps, la formulation dimensionnelle de cette solution est

$$d(t) = \frac{L_*}{T_*} t = \frac{Q_{in}}{S} t. \quad (14)$$

Question (e)

On peut estimer le temps de convergence t_c vers la solution asymptotique en cherchant quand

$$d(t_c) = d_\infty \Rightarrow t_c = \frac{S}{Q_{in}} \left(\frac{Q_{in}}{C_d w \sqrt{g}} \right)^{2/3} = \frac{S}{c^{2/3} g^{1/3} Q^{1/3} w^{2/3}}$$

Application numérique: $t_c = 53$ h.

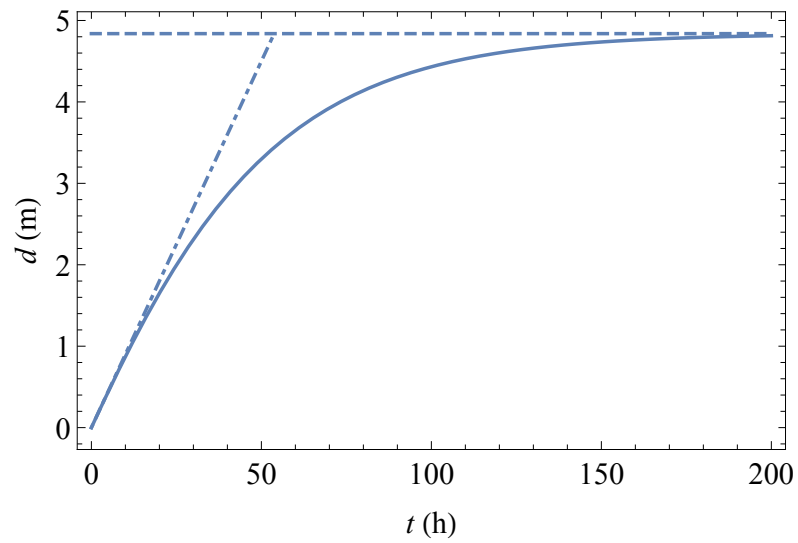


Figure 4 : solution numérique de l'équation (11) avec report des solutions asymptotiques (14) (pour $t \ll t_c$) et (13).