Conditions d'examen

Professeur responsable : Christophe ANCEY

Documentation autorisée : aucune documentation sauf formulaire A4

Matériel autorisé : aucun matériel électronique sauf calculatrice simple

Durée de l'examen : 2 h 45 (8 h 15–11 h 00)

Date et lieu : 22 juin 2017 salle CO3

---

1. Lisez bien les données, tout ce dont vous avez besoin pour résoudre les exercices y figure !
2. **Écrivez vos noms et prénom(s) en lettres capitales.**
3. L'examen comporte 6 exercices. Le total des points P est 7. La note finale N de cet examen est $N = 1 + 5P/7$.
4. **Aucun document n'est autorisé, à l'exception d'un formulaire recto-verso au format maximal A4. Une calculatrice scientifique (éventuellement graphique) est tolérée. Les appareils de type mini PC ou tout autre appareil permettant de communiquer et/ou stocker des données sont interdits. Un formulaire accompagne chaque question.**
5. **Le résultat des calculs devra être encadré et écrit de façon très lisible. Les calculs seront éventuellement joints sur des feuilles au propre.** Les feuilles mal écrites ou écrites avec un crayon papier seront considérées comme des brouillons et ne seront pas prises en compte ; **une pénalité de 0,25 (sur la note N) sera appliquée à la note de cet examen** pour ceux qui ne respecteront pas cette consigne. Pour les applications numériques, ne pas oublier les unités. Pensez à numéroter les pages et mettre vos noms sur chaque feuille.
6. Le barème de chaque question est indiqué au début de chaque question. Choisissez bien vos questions pour optimiser vos points.
7. Il n'y a pas de pièges, mais il faut aller vite...

Problème 1 Un Parshall est un dispositif qui sert à mesurer le débit dans un canal à partir de la mesure de la hauteur (voir figure 1). Il comporte :

- un tronçon convergent, tout d'abord ascendant puis horizontal, où l'écoulement est subcritique ;
- un coursier à pente descendante, étroit de largeur constante W_2, où l'écoulement est critique ;
- un tronçon divergent et légèrement ascendant, où l'écoulement est supercritique.

On mesure la hauteur d'eau h_1 dans un puits relié au premier tronçon au niveau de la section 1 (voir figure 1). La largeur du canal en cette section est notée W_1. Le débit total est Q. Le régime est permanent. La différence d'altitude entre le sommet du seuil (section 2) et le lit du canal est notée Δz. On appelle h_c la hauteur critique atteinte dans le second tronçon où l'écoulement est critique (on a donc $h_2 = h_c$). Le seuil est dénoyé.

(a) [0,20] Donner l'expression de l'énergie totale à la section 2 en fonction de Δz et h_c.

(b) [0,20] Donner l'expression de l'énergie totale à la section 1 en fonction de Δz, Q, W_1 et h_1.

(c) [0,20] En négligeant la dissipation d'énergie entre les sections 1 et 2, déterminer l'équation (implicite) permettant de calculer le débit si on suppose que h_1 est déterminée (à partir d'une mesure dans le puits).

(d) [0,20] Faire une application numérique.

(e) [0,20] Dans l'expression de l'énergie spécifique à la section 1, laquelle des deux contributions est négligeable et pourquoi ? En déduire une expression approchée permettant de déduire Q en fonction de Δz, W_2, W_1 et h_1. Faire une application numérique. Quelle est la précision de cette approximation ?

Données numériques :

- Largeur des tronçons : $W_1 = 6$ m et $W_2 = 2$ m
- Hauteur mesurée $h_1 = 1$ m
- Hauteur de la marche $\Delta z = 30$ cm

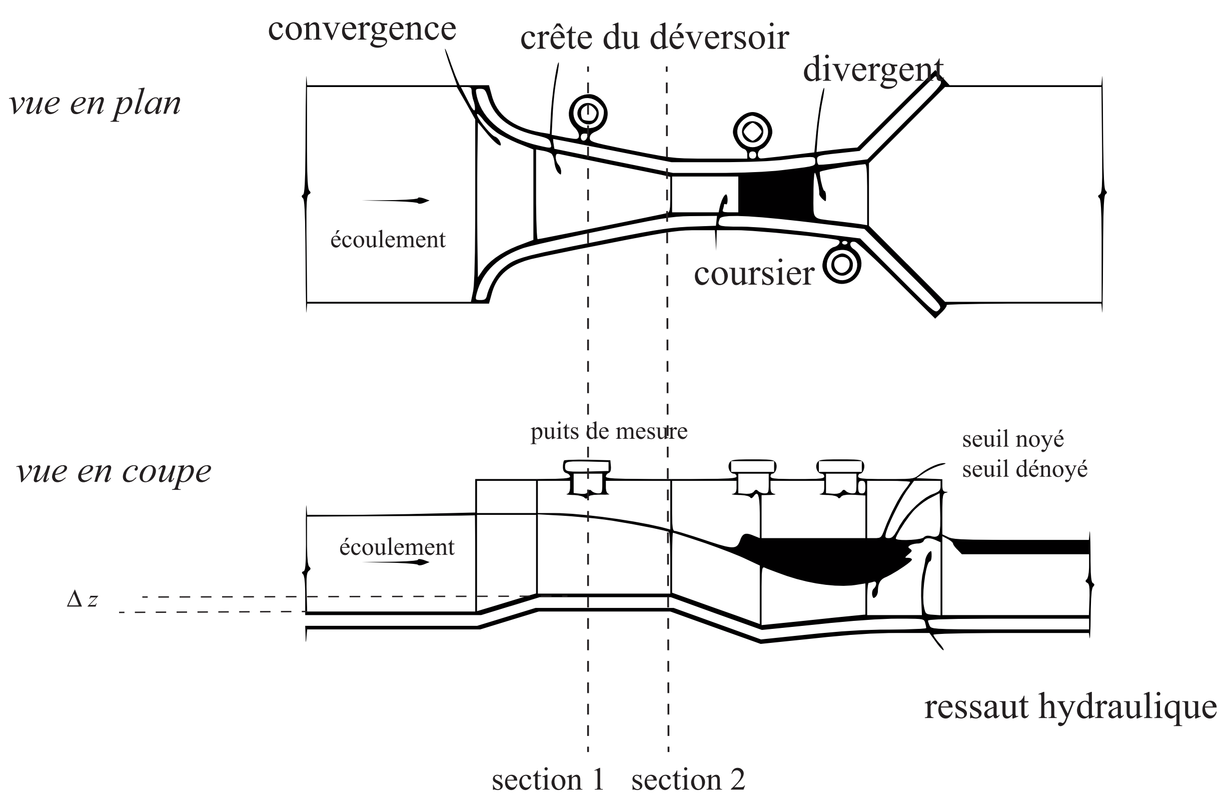


Figure 1 : schéma d'un canal Parshall.

Réponses : (a). L'énergie totale au point 2 (en prenant le fond du canal comme référence des z) est

$$E_2 = \Delta z + h_2 + \frac{u_2^2}{2g},$$

avec $h_2 = h_c$ et $u_2 = Q/(W_2 h_2)$. Comme $Fr = 1$, on en déduit que

$$h_2 = h_c = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{gW_2^2}}$$

On a donc $Fr = 1 \Rightarrow u_2^2/(2g) = h_c/2$ et donc

$$E_2 = \Delta z + \frac{3}{2}h_2,$$

(b). Par définition, on a

$$E_1 = \Delta z + h_1 + \frac{u_1^2}{2g}$$

avec $u_1 = Q/(W_1 h_1)$.

(c). Les deux points étant sur le même plan, il y a égalité des énergies spécifiques en l'absence de perte de charge. Donc

$$E_1 = \Delta z + h_1 + \frac{u_1^2}{2g} = E_2 \Rightarrow h_1 + \frac{Q^2}{2gW_1^2h_1^2} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{Q^2}{gW_2^2}}$$

ou bien encore

$$Q = \frac{2\sqrt{2g}}{3\sqrt{3}}W_2\left(h_1 + \frac{Q^2}{2gW_1^2h_1^2}\right)^{3/2}$$

(d). AN : $Q = 3{,}5\ \mathrm{m^3/s}$.

(e). Comme l'écoulement est subcritique, on peut supposer que l'énergie cinétique est bien plus faible que la pression, donc

$$h_1 \gg \frac{Q^2}{2gW_1^2h_1^2}$$

Il s'ensuit alors

$$Q \approx \frac{2\sqrt{2g}}{3\sqrt{3}}W_2h_1^{3/2}$$

AN $Q = 3{,}41\ \mathrm{m^3/s}$. L'erreur relative est donc

$$\frac{\Delta Q}{Q} = \frac{3{,}41 - 3{,}5}{3{,}5} = -2{,}6\ \%$$

Problème 2 Un réservoir contient un volume d'eau (voir figure 2). La hauteur est $h = 8$ m. La paroi du réservoir est munie d'une vanne de forme semi-circulaire de rayon $R = 2$ m. On souhaite calculer exercer la force de pression exercée par l'eau sur cette vanne afin de concevoir un dispositif de fermeture adapté. On suppose que la pression atmosphérique est $p_a = 0$.

(a) [0,20] Donner l'expression de la distribution de pression au sein du volume d'eau selon la verticale.

(b) [0,60] Calculer la résultante des forces de pression qui s'exercent sur la vanne.

(c) [0,20] Faire l'application numérique.

(d) [0,50] Calculer la position du point d'application de la résultante des forces et le moment résultant des forces de pression par rapport à la charnière supposée être le long du sol.

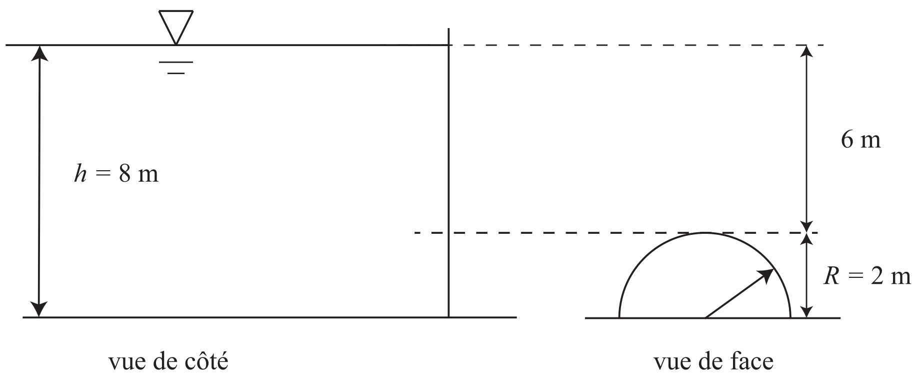


Figure 2 : schéma du réservoir.

Réponses :

(a). La pression est hydrostatique, donc si on note z l'axe vertical orienté vers le haut, avec pour origine le sol, on a

$$p(z) = \varrho g(h - z),$$

avec ϱ et g la masse volumique de l'eau et l'accélération de la gravité.

(b). On calcule la surface élémentaire sur laquelle s'exerce un incrément infinitésimal de force de pression dF tel que p y soit homogène

$$\mathrm{d}S = 2R\cos\theta \mathrm{d}z = 2R^2\cos^2\theta \mathrm{d}\theta,$$

avec $z = R\sin\theta$ et $\mathrm{d}z = R\cos\theta\mathrm{d}\theta$. On en déduit qu'en norme

$$\mathrm{d}F = p\mathrm{d}S = \varrho g(h - R\sin\theta)2R^2\cos^2\theta\mathrm{d}\theta,$$

et donc en intégrant

$$F = \int \mathrm{d}F = \int_0^{\pi/2} \varrho g(h - R\sin\theta)2R^2\cos^2\theta\mathrm{d}\theta = 2\varrho gR^2\left(\frac{h\pi}{4} - \frac{R}{3}\right).$$

(c). On trouve $F = 440{,}784$ kN.
(d). Par définition le moment par rapport à l'axe Oy (y orienté perpendiculairement au plan de la feuille) est

$$M = \int z\mathrm{d}F = \int_0^{\pi/2} \varrho gR\sin\theta(h-R\sin\theta)2R^2\cos^2\theta\mathrm{d}\theta = \frac{\varrho gR^3}{24}(16h - 3\pi R)$$

Par définition, le point d'application correspond au bras de force d tel que $M = Fd$, d'où

$$d = \frac{\varrho gR^3}{48\varrho gR^2}\frac{16h - 3\pi R}{\dfrac{h\pi}{4} - \dfrac{R}{3}} = \frac{R(16h - 3\pi R)}{4(3h\pi - 4R)}.$$

(e). AN : $M = 356{,}9$ kN·m et $d = 81$ cm.

Problème 3 Un canal industriel de section rectangulaire (et de largeur B) est muni d'une vanne guillotine de même largeur. La vanne est ouverte en partie et laisse passer une lame d'eau d'épaisseur d (voir figure 3). Un régime permanent est établi, avec un débit total Q. On néglige le frottement de l'eau sur les parois du canal.

(a) [0,20] En appliquant le théorème de Bernoulli, établir le débit qui transite sous la vanne sachant qu'à l'amont de ladite vanne, il y a une hauteur d'eau h_1. Pour ce faire, on pourra s'inspirer de la démonstration de la formule de Torricelli. On suppose que la vanne est « dénoyée », c'est-à-dire que l'écoulement aval ne perturbe pas l'écoulement amont.

(b) [0,10] Des mesures montrent que le débit sous la lame est

$$Q = C_d B d \sqrt{2gh_1}$$

avec $C_d = 0{,}67$. Si cette équation est différente de l'équation obtenue précédemment, justifier la raison de l'écart. Faire l'application numérique.

(c) [0,20] On souhaite calculer la force F qu'il faut exercer pour maintenir en place la vanne lorsqu'il y a écoulement. Pour cela on va se servir des équations de conservation sur un volume de contrôle arbitraire fixe qui englobe la vanne et les deux tronçons du canal de part et d'autre de la vanne (voir figure 3). Le fluide est parfait (non visqueux). Exprimer la conservation de la masse en établissant une relation liant les variables h_1, h_2, u_1 et u_2.

(d) [0,20] Calculer la force de pression qui s'exerce sur la face amont et celle qui s'exerce sur la force aval du volume de contrôle. On prendra garde de fournir ici des valeurs algébriques (la projection de la force sur l'axe x).

(e) [0,20] Calculer les flux de quantité de mouvement à travers les faces amont et aval du volume de contrôle.

(f) [0,50] En appliquant le principe de conservation de la quantité de mouvement, établir la force F de réaction qui s'exerce sur la vanne.

(g) [0,10] Faire l'application numérique.

Données :

- $B = 10$ m, $d = 1$ m
- $h_1 = 5$ m et $h_2 = 80$ cm.

Formulaire :
Le théorème de conservation appliqué à un volume de contrôle arbitraire (non matériel) V_a s'écrit

$$\varrho \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{V_a} \varrho \boldsymbol{u} \mathrm{d}V + \int_{S_a} \varrho \boldsymbol{u}[(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{w}) \cdot \boldsymbol{n}] \mathrm{d}S = \varrho V_a \boldsymbol{g} + \int_{S_a} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S$$

où S_a est la surface enveloppant V_a, $\boldsymbol{w}$ est la vitesse de déplacement de la surface arbitraire S_a, $\boldsymbol{w}$ est la normale à la surface de contrôle orientée de l'intérieur vers l'extérieur de V_a, $\boldsymbol{\sigma}$ est le tenseur des contraintes (pour un fluide parfait $\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{1}$ avec p la pression), et $\boldsymbol{u}$ est la vitesse matérielle du fluide.

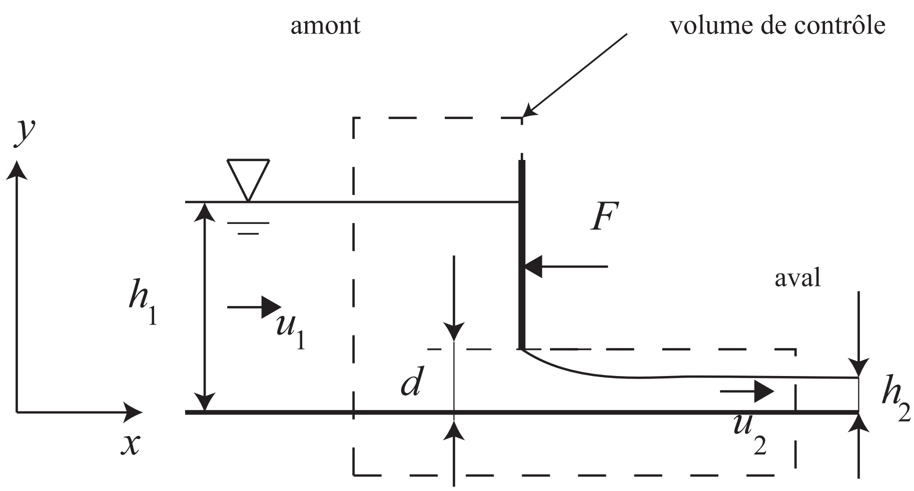


Figure 3 : schéma de principe d'une vanne à guillotine.

Réponses :
(a). On reproduit le raisonnement suivi pour l'expérience de Torricelli. Un des points inconnus est la vitesse d'un point sur une ligne de courant au niveau de la surface libre. En première approximation, on va supposer qu'elle est nulle. De même, un autre point concerne la pression au bout de la ligne de courant, au niveau de la vanne. Celle-ci

n'est pas égale à la pression atmosphérique comme dans l'expérience de Torricelli. L'ordre de grandeur est $\varrho g d/2$. On note qu'il y a un facteur 10 avec le terme potentiel $\varrho g h_1$. Une approximation grossière consiste donc à considérer que l'ordre de grandeur de la vitesse au niveau de la vanne est donnée par la formule de Torricelli

$$v \sim \sqrt{2gh_1},$$

d'où l'on tire

$$Q = Bd\sqrt{2gh_1}.$$

(b). Compte tenu des approximations faites et des pertes de charges singulières, on s'attend à avoir un débit plus faible que le débit théorique trouvé précédemment. Dimensionnellement, la formule précédente semble correcte. L'analyse dimensionnelle nous pousse à poser $Q = C_d Bd\sqrt{2gh_1}$. Le fait que $C_d < 1$ est cohérent.
AN : $Q = 66{,}4\ \mathrm{m}^3/\mathrm{s}$
(c). La conservation de la masse implique la conservation du débit en régime permanent, donc

$$q = \frac{Q}{B} = u_1 h_1 = u_2 h_2.$$

(d). La force de pression (projetée sur x) sur la face amont est facile à déterminée à partir de la loi de Pascal

$$F_1 = \frac{1}{2}\varrho g h_1^2 B$$

tandis que sur la face aval on a

$$F_2 = -\frac{1}{2}\varrho g h_2^2 B.$$

(e) Le flux de quantité de mouvement projeté sur x est

$$P_1 = \boldsymbol{e}_x \cdot \int_0^{h_1} \varrho \boldsymbol{u}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n})\mathrm{d}S$$

avec $\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{e}_x$ la normale au volume de contrôle orientée de l'intérieur vers l'extérieur. Donc on a

$$P_1 = -\varrho u_1^2 B h_1.$$

De même sur la face aval, on a

$$P_2 = \varrho u_2^2 B h_2.$$

(f) Le principe de conservation de la quantité de mouvement implique

$$P_1 + P_2 = F + F_1 + F_2,$$

avec F la force exercée par la vanne sur le volume de contrôle. On a donc

$$F = P_1 + P_2 - F_1 - F_2 = \varrho B(-u_1^2 h_1 + u_2^2 h_2) + \frac{1}{2}\varrho g B(h_2^2 - h_1^2),$$

et en se servant de la conservation de la masse, on élimine u_2 et on obtient

$$F = \varrho B u_1^2 h_1 \left(\frac{h_1}{h_2} - 1\right) - \frac{1}{2}\varrho g B h_1^2 \left(1 - \frac{h_2^2}{h_1^2}\right)$$

ou bien encore

$$F = \varrho u_1 Q \left(\frac{h_1}{h_2} - 1\right) - \frac{1}{2}\varrho g B h_1^2 \left(1 - \frac{h_2^2}{h_1^2}\right)$$

(g) AN $F = -732{,}5$ kN.

Problème 4 On réalise une étude en soufflerie de l'effet du vent sur une cheminée en béton de longueur 20 m et de diamètre 1 m. Le modèle réduit est à l'échelle 1 : 100 et il est constitué d'un tube en aluminium lisse. Dans la soufflerie, l'air est injecté à 45 m/s à une température de 20 °C et à une pression de $p_a = 10^5$ Pa. Un dynamomètre permet de mesurer la force exercée par l'air sur le cylindre.

(a) [0,40] En soufflerie, on mesure une force $F = 2{,}2 \pm 0{,}1$ N. Est-ce que cette valeur est cohérente avec le diagramme $C_D = f(Re_d)$ de la figure 4 ? (Bien justifier sa réponse).

(b) [0,40] Indiquer la force correspondante pour la cheminée et la plage de vitesse du vent pour laquelle cette force est à peu près constante.

(c) [0,20] Le modèle réduit a été réalisé en métal. Pensez-vous que ce choix soit judicieux ?

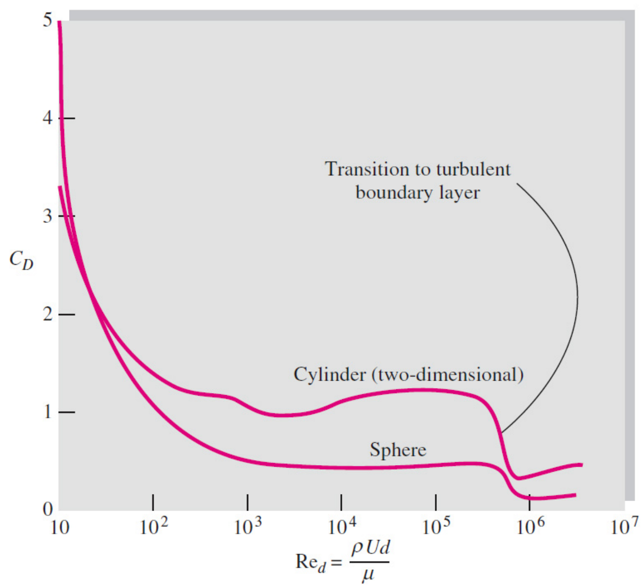
Données :

- caractéristiques de l'air : voir les valeurs reportées dans le tableau 1 (les interpoler si nécessaire).
- masse volumique béton armé $\varrho = 2400$ kg·m^{-3}
- masse volumique aluminium $\varrho = 2690$ kg·m^{-3}
- Expression de la force de traînée $F = \frac{1}{2} C_D S \varrho u^2$ (S surface apparente offerte à l'écoulement)

Tableau 1 : caractéristiques de l'air en fonction de T (température en kelvins) à pression atmosphérique constante ($p_a = 1$ bar), avec ϱ, masse volumique ; μ, viscosité dynamique ; ν, viscosité cinématique. D'après Frank M. White, *Heat and Mass transfer*, Addison-Wesley, 1988.

T	ϱ	μ	ν
K	kg·m^{-3}	Pa·s	m^2·s^{-1}
250	1,413	$1{,}60\times10^{-5}$	$0{,}949\times10^{-5}$
300	1,177	$1{,}85\times10^{-5}$	$1{,}57\times10^{-5}$
350	0,998	$2{,}08\times10^{-5}$	$2{,}08\times10^{-5}$
400	0,883	$2{,}29\times10^{-5}$	$2{,}59\times10^{-5}$
450	0,783	$2{,}48\times10^{-5}$	$2{,}89\times10^{-5}$
500	0,705	$2{,}67\times10^{-5}$	$3{,}69\times10^{-5}$

Réponses : (a) On calcule tout d'abord les caractéristiques de l'air à $T = 293$ K et $p_a = 10^5$ Pa. Par interpolation linéaire des valeurs



Cylinder length effect

($10^4 < \mathrm{Re} < 10^5$)

L/d	C_D
∞	1.20
40	0.98
20	0.91
10	0.82
5	0.74
3	0.72
2	0.68
1	0.64

Figure 4 : valeur du coefficient de traînée C_D en fonction du nombre de Reynolds $Re = \varrho U d/\mu$ avec d le diamètre de la sphère ou du cylindre pour un obstacle lisse. D'après Frank M. White, *Heat and Mass transfer*, Addison-Wesley, 1988.

tabulées, on trouve

$$\varrho = 1{,}21 \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^3 \text{ et } \mu = 1{,}81 \times 10^{-5} \mathrm{Pa} \cdot \mathrm{s}.$$

On en déduit que

$$Re_d = \frac{45 \times 0{,}20 \times 1{,}21}{1{,}81 \times 10^{-5}} = 3 \times 10^4$$

Les valeurs tabulées dans la figure 4 nous disent que l'on devrait avoir $C_d = 0{,}91$. Quand on calcule le coefficient de traînée du cylindre en soufflerie, on a

$$C_d = \frac{F}{\frac{1}{2}\varrho S u^2} = \frac{2{,}2}{0{,}5 \times 0{,}2 \times 0{,}01 \times 1{,}2 \times 45^2} = 0{,}905$$

avec $S = Ld$. Il y a donc un écart relatif de $(0{,}905 - 0{,}91)/0{,}91 = 0{,}5\ \%$. On peut considérer que la valeur est cohérente car l'erreur est plus petite que l'incertitude sur la mesure de la force.

(b) La figure 4 nous dit que la valeur $C_d = 0{,}91$ est valable pour la plage $10^4 < Re_d < 10^5$, or comme

$$U_{chem.} = Re_d \frac{\mu}{\varrho d},$$

cela implique que la gamme de validité en termes de vitesse va de 15 cm/s à 1,5 m/s.

(c) La nature du matériau n'importe pas, ce qui compte c'est la rugosité de la surface. En effet, le coefficient de traînée dépend de la rugosité à grand nombre de Reynolds. Ici on n'indique pas de rugosité. Un béton lisse se comporte *a priori* comme de l'aluminium lisse en laboratoire, donc le choix du matériau ne semble pas poser de problème.

Problème 5 On considère l'écoulement permanent d'un fluide newtonien incompressible de viscosité cinématique ν entre deux plans parallèles de grandes dimensions, placés horizontalement, et séparés d'une distance d (voir figure 5). Le fluide est mû par un gradient de pression constant $\partial p_x = -a < 0$ (avec a une constante positive). L'axe x est orienté dans le sens de l'écoulement.

(a) [0,20] En supposant que l'écoulement est en régime laminaire, écrire les équations de Navier-Stokes et les conditions aux limites. Les simplifier en tenant compte des symétries simples du problème.

(b) [0,20] Résoudre les équations : déterminer le profil de vitesse en fonction de a, le tracer. Quelle est la vitesse moyenne du fluide $\bar{u}$?

(c) [0,20] Calculer la contrainte de cisaillement et tracer son profil.

(d) [0,20] Le coefficient de Darcy-Weisbach f est lié aux pertes de charges (ici le gradient de pression qu'il faut imposer pour mouvoir le fluide) de telle sorte que

$$|\Delta p| = \frac{1}{2} f \frac{L}{D_h} \varrho \bar{u}^2$$

avec $D_h = d$ le diamètre hydraulique, L la longueur sur laquelle est appliqué le gradient de pression (si Δp est la différence de pression entre deux points séparés de L, alors $\partial_x p = \Delta p/L = -a$), ϱ la masse volumique du fluide.

Calculer f en régime laminaire en fonction du nombre de Reynolds $Re = 4D_h\bar{u}/\nu$.

(e) [0,20] On considère maintenant que l'écoulement est en régime turbulent. On adopte une équation algébrique de fermeture de type « longueur de mélange » pour la viscosité turbulente. Quelle est la forme du profil de vitesse moyennée près de la paroi (on supposera que la contrainte est constante et égale à la contrainte pariétale).

Réponses :

(a) Comme l'écoulement est permanent, on $\partial_t = 0$. De même l'invariance en x fait que l'on cherche $u(y)$ et on pose directement $v = w = 0$; le champ de vitesse a une seule composante non nulle (celle selon x) et elle ne dépend que de la variable y. Seule la pression peut dépendre de x, toutes les autres variables ne peuvent en dépendre. Donc la conservation de la masse est trivialement satisfaite

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

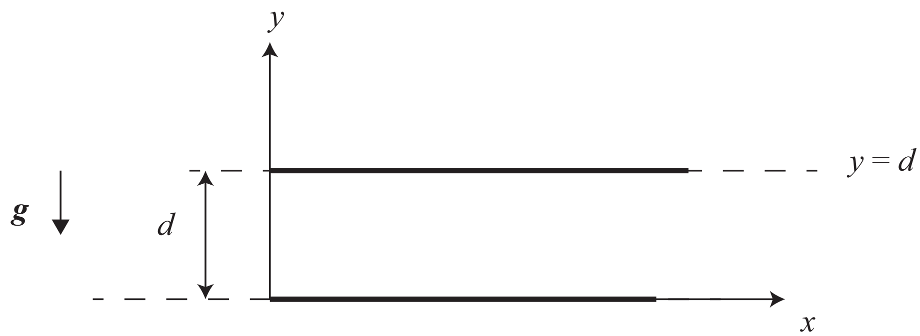


Figure 5 : écoulement entre deux plaques parallèles.

La conservation de la quantité de mouvement dans la direction x se simplifie considérablement

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \varrho g_x + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

et comme on a une dépendance $u(y)$ et $\partial_x p = -a$, alors l'équation du mouvement est

$$u''(y) = -\frac{a}{\mu}.$$

Les conditions aux limites imposent l'adhérence aux parois

$$u(d) = u(0) = 0.$$

(b) L'équation du mouvement s'intègre facilement

$$u(y) = \frac{a}{2\mu} y^2 + by + c,$$

avec b et c deux constantes. Les conditions aux limites imposent : $c = 0$ et $b = ad/(2\mu)$. Donc

$$u(y) = \frac{a}{2\mu} y(d - y)$$

Le profil de vitesse est parabolique. Par intégration on trouve :

$$\bar{u} = \frac{1}{h} \int_0^h u(y) \mathrm{d}y = \frac{a}{12\mu} d^2.$$

(c) Par définition, la contrainte de cisaillement est

$$\tau = \mu \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = \frac{a}{2}(d - 2y).$$

Le profil de contrainte est donc linéaire.
(d) De la relation donnant la vitesse moyenne on tire

$$|\Delta p| = 12 \frac{\mu \bar{u} L}{d^2}$$

et en égalant cette relation avec la définition de f on tire

$$f = 24 \frac{D\nu}{\bar{u} d^2} = \frac{96}{Re}.$$

(e) Par définition on a en $y = 0$

$$\tau_p = \varrho \kappa^2 y^2 \left| \frac{\mathrm{d}\langle u \rangle}{\mathrm{d}y} \right|^2 = \frac{ad}{2}.$$

Pour simplifier les notations on introduit la vitesse de glissement $u_* = \sqrt{\tau_p/\varrho}$. On peut donc mettre l'équation précédente sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}\langle u \rangle}{u_*} = \frac{\mathrm{d}y}{\kappa}$$

qui s'intègre facilement

$$u(y) = \frac{u_*}{\kappa} \ln \frac{y}{y_0},$$

avec y_0 une constante d'intégration. Le profil de vitesse est logarithmique près de la paroi.

Problème 6 On considère un écoulement permanent d'eau dans un canal de laboratoire. Le fond est composé d'un lit en gravier. La section est rectangulaire de largeur $W = 60$ cm. Les parois sont en verre. La pente du lit est 2 %. Le diamètre d_{90} est 6 mm. Le débit liquide est $Q = 25$ l/s. La longueur du canal est 20 m. À la sortie du canal, l'eau chute dans un réservoir (on peut considérer que l'écoulement devient critique à la sortie du canal).

(a) [0,20] Pourquoi peut-on faire l'approximation d'écoulement indéfiniment large dans le cas présent.

(b) [0,20] Calculer la hauteur normale et la hauteur critique.

(c) [0,20] Quel est le régime d'écoulement.

(d) [0,40] Tracer le profil de hauteur en prenant 3 hauteurs initiales $h = 2$ cm, 5 cm, 10 cm. Justifier la forme des courbes tracées.

Réponses :

(a) Les parois en verre sont bien plus lisses que le fond en gravier. Le frottement y est donc moindre. Négliger le frottement des parois en verre est donc pertinent.

(b) On a $K = 23{,}2/d_{90}^{1/6} = 54\ \mathrm{m}^{1/3}/\mathrm{s}$. On calcule les hauteurs demandées

$$h_n = \left(\frac{q}{K\sqrt{i}}\right)^{3/5} = 4{,}4 \text{ cm et } h_c = \left(\frac{q^2}{g}\right)^{1/3} = 5{,}6 \text{ cm}.$$

(c) Comme $h_n < h_c$ le régime est supercritique. Le nombre de Froude est $Fr = q/\sqrt{gh_n^3} = 1{,}45$ dans la partie du canal où la hauteur atteint la hauteur normale.

(d) L'équation de la courbe de remous est

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} = \frac{j_f - i}{\mathrm{Fr}^2 - 1} = \frac{N(h)}{D(h)} = i\frac{(h_n/h)^{10/3} - 1}{(h_c/h)^3 - 1}$$

On voit que le signe de h' dépend de la position de h par rapport à h_n et h_c. Pour $h_0 = 2$ cm, on a $h_0 < h_n < h_c$, donc $N(h_0) < 0$ et $D(h_0) < 0$. La courbe est croissante. Elle tend vers h_n.

Pour $h_0 = 5$ cm, on a $h_n < h_0 < h_c$, donc $N(h_0) > 0$ et $D(h_0) < 0$. La courbe est décroissante. Elle tend vers h_n.

Pour $h_0 = 10$ cm, on a $h_n < h_c < h_0$, donc $N(h_0) > 0$ et $D(h_0) > 0$. La courbe est croissante. Elle croît indéfiniment.
On note que la condition à la limite aval (chute d'eau avec passage à un écoulement critique) n'influe pas sur la solution calculée ici car l'écoulement est supercritique dans le canal, donc pas influencé par ce qui se passe à l'aval.

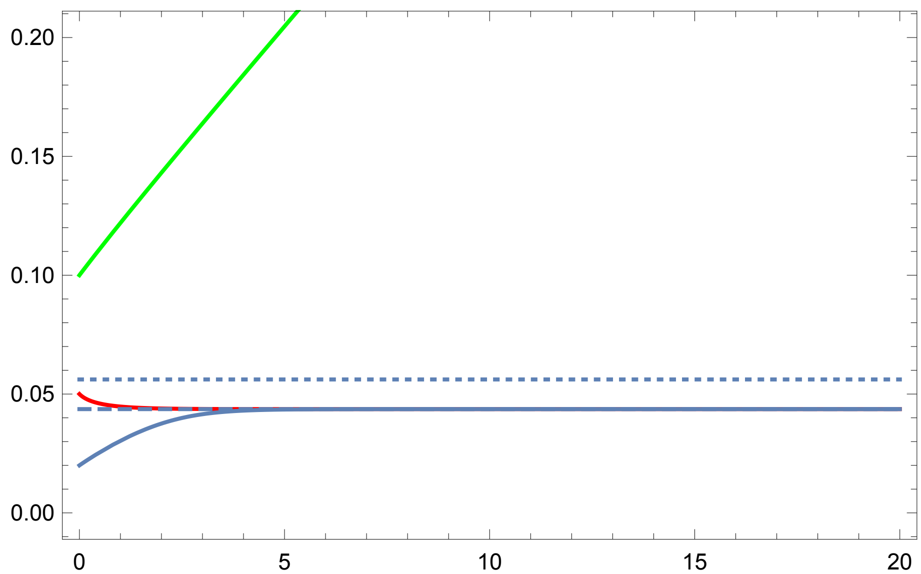


Figure 6 : solution numérique de la courbe de remous pour les trois conditions imposées.