QCM **Mécanique des fluides**

Examen (final) n° 3

Professeur responsable : Christophe ANCEY
Documentation autorisée : aucune documentation sauf formulaire A4 (recto et verso)
Matériel autorisé : aucun matériel électronique sauf calculatrice simple
Durée de l'examen : 3 h (8 h 15–11 h 15)
Date et lieu : 21 juin 2016 salle SG 1

1. L'examen comporte 21 questions sur QCM et 9 questions à rendre sur feuille libre. Chaque question rapporte 1 point, mais le tout est noté sur 25 points. Vous pouvez donc répondre aux 30 questions (ce qui fait jusqu'à 5 points de bonus) ou bien en laisser jusqu'à 5 de côté.
2. Il n'y a qu'une bonne réponse par question.
3. Le barème de chaque question est indiqué au début de chaque question.
4. Les réponses fausses entraînent des pénalités (1 point par réponse fausse).
5. Remplir les cases au stylo noir ou bleu (ne cochez pas, ne barrez pas).

Exercice 1

Un pipeline transporte du pétrole de masse volumique $\varrho = 800$ kg/m^3 et de viscosité dynamique $\mu = 6$ mPa s. Le débit nominal est $Q = 500$ l/s. Une station de pompage compense exactement les pertes de charge ΔH sur une distance $L = 10$ km. Le diamètre du tube cylindrique est $D = 800$ mm. Un modèle réduit est fabriqué avec un rapport d'aspect de 1:50. On emploie de l'air comme fluide dans l'essai à échelle réduite. La masse volumique de l'air est 1,2 kg/m^3 et sa viscosité dynamique est $\mu = 2 \times 10^{-5}$ Pa s. La constante de gravité vaut $g = 9{,}8$ m/s^2.

Question 1 [1 pt] Combien de nombre sans dimension peut-on former ?

- A 1
- B 4
- C 5
- D 2
- E 3

Question 2 [1 pt] Calculer le nombre de Reynolds à l'échelle 1 (celle du pipeline).

- A aucune de ces réponses
- B $Re = 4\varrho QD/(\pi\mu D^2) = 1{,}06 \times 10^5$
- C $Re = 4\varrho QD/(\pi\mu D^2) = 1{,}06 \times 10^2$
- D $Re = 4\varrho QL/(\pi\mu D^2) = 1{,}3 \times 10^7$
- E $Re = \varrho QD/\mu = 533 \times 10^3$

Question 3 [1 pt] Quelle est la vitesse de l'air dans le modèle réduit ?

- A $U = 80$ m/s
- B aucune de ces réponses
- C $U = 8$ m/s
- D $U = 110$ m/s

Exercice 2

On considère un canal rectiligne sur fond horizontal, de largeur B. On observe la propagation d'un ressaut hydraulique (mascaret), qui s'apparente à une « onde de choc » ou une discontinuité se déplaçant à la vitesse constante c dans le sens de l'écoulement. On va s'intéresser à ce qui se passe dans un volume de contrôle mobile ABCD (voir figure 1) qui se déplace à la vitesse c ; ce volume est dit arbitraire car il se déplace à une vitesse différente de la vitesse (matérielle) de l'eau. Le raisonnement que l'on va suivre est donc identique à celui utilisé en cours pour obtenir l'équation du ressaut hydraulique si ce n'est que le ressaut est désormais mobile.

Le volume de contrôle est supposé de petites dimensions en sorte que l'on puisse négliger les pertes de charge dues au frottement sur le fond par rapport à la dissipation d'énergie associée à la propagation du mascaret (cela revient aussi à supposer le fluide parfait, c.-à-d. de viscosité nulle). La masse volumique de l'eau est ϱ. Le mascaret est dû au lâcher d'eau d'un barrage. On supposera qu'à l'aval, la hauteur est uniforme et égale à h_2 ; la vitesse est $u_2 = 0$. A l'amont du mascaret, la hauteur est également uniforme, mais égale à $h_1 > h_2$; la vitesse est $u_1 > 0$. On supposera ici que le profil de vitesse est uniforme : par exemple, le profil de vitesse à l'amont du ressaut est $u(z) = u_1$ pour $0 \leq z \leq h_1$. La pression atmosphérique est supposée nulle.

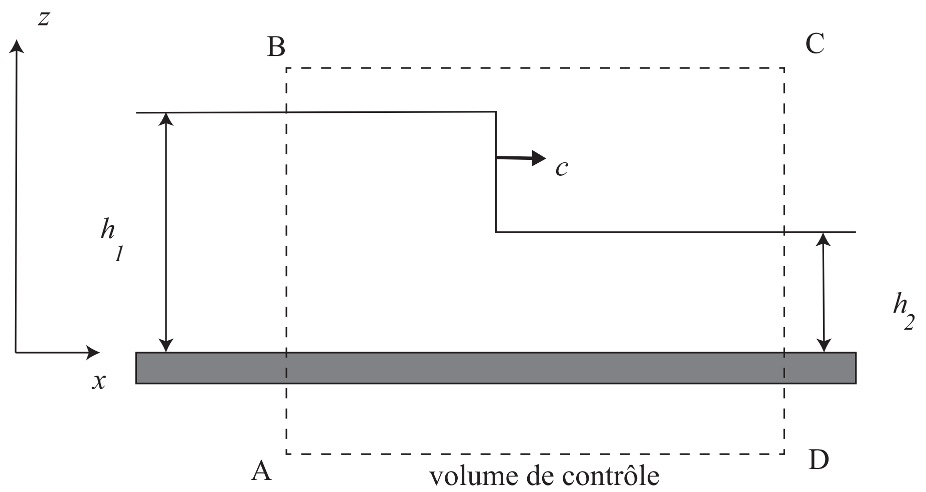

Figure 1 : schéma d'un mascaret avec le volume de contrôle (arbitraire) V_a associé.

Question 4 [1 pt] Est-ce que la pression est hydrostatique ?

- [A] non, car l'eau est en mouvement, la loi de Pascal ou loi de l'hydrostatique ne s'applique pas.
- [B] oui, il faut appliquer Bernoulli pour connaître la pression.
- [C] oui, même si l'eau est en mouvement, la pression reste hydrostatique car la hauteur est uniforme et le fluide parfait.

Question 5 [1 pt] Quelle est la distribution de pression $p(z)$ sur la face AB ?

- [A] $p(z) = \varrho g(h_1 - z)$
- [B] $p = -\varrho \frac{1}{2} u_1^2$
- [C] $p = 0$
- [D] $p = -\varrho \frac{1}{2} u_1^2 - \varrho g z$

Question 6 [1 pt] Quelle est la résultante des forces de pression F_{AB} sur la face AB ?

- [A] $F_{AB} = 0$
- [B] $F_{AB} = \frac{1}{2}\varrho g B h_1^2$
- [C] $F_{AB} = -\varrho \frac{1}{2} u_1^2 h_1 B - \frac{1}{2}\varrho g B h_1^2$

Question 7 [1 pt] Quelle est la résultante des forces de pression F_{CD} sur la face CD ?

- [A] $F_{CD} = \varrho \frac{1}{2} c^2 h_2 B - \frac{1}{2}\varrho g B h_2^2$
- [B] $F_{CD} = 0$
- [C] $F_{CD} = -\frac{1}{2}\varrho g B h_2^2$

Question 8 [1 pt] En vous servant de la conservation de la masse en régime permanent, déterminer la célérité c en fonction de h_1 et h_2

- [A] $c = u_1 h_1 / h_2$
- [B] $c = \sqrt{g h_1}$
- [C] $c = h_1 u_1 / (h_1 - h_2)$
- [D] $c = \frac{1}{2}(h_1 + h_2)$

Question 9 [1 pt] En vous servant de la conservation de la quantité en mouvement en régime permanent, déterminer le flux ϕ_{AB} de quantité de mouvement à travers la face AB.

- [A] $\phi_{AB} = -\varrho B h_1 u_1^2$
- [B] $\phi_{AB} = -\varrho B h_1 u_1 (u_1 - c)$
- [C] $\phi_{AB} = 0$
- [D] $\phi_{AB} = -\varrho B h_1 (u_1 - c)^2$

Question 10 [1 pt] En vous servant de la conservation de la quantité en mouvement en régime permanent, déterminer le flux ϕ_{CD} de quantité de mouvement à travers la face CD.

- [A] $\phi_{CD} = -\varrho B u_1^2$
- [B] $\phi_{CD} = \varrho B c^2$
- [C] $\phi_{CD} = 0$
- [D] aucune de ces réponses

Question 11 [1 pt] En régime permanent, la conservation de la quantité de mouvement implique que le flux de quantité de mouvement à travers la surface de contrôle est égal à la somme des forces appliquées au volume (théorème d'Euler). En déduire l'équation que doit vérifier c en égalant forces de pression et flux de quantité de mouvement après simplification.

- [A] $u_1^2 h_1 + g h_1^2 = -c^2 h_2 + g h_2^2$
- [B] $u_1^2 h_1 + g h_1^2 = c^2 h_2 - g h_2^2$
- [C] $\dfrac{1}{2} g (h_1^2 - h_2^2) = h_1 u_1 (c - u_1)$

Question 12 [1 pt] En vous servant de conservation de la masse, en déduire la vitesse c en fonction de h_1 et h_2 :

A $c = \dfrac{\sqrt{gh_2^2 - gh_1^2}}{\sqrt{\frac{h_2^2}{h_1} + h_1 - h_2}}$

B $c = \sqrt{g\dfrac{h_1}{2h_2}(h_1 + h_2)}$

C $c = u_1 + \dfrac{\sqrt{gh_2^2 - gh_1^2}}{\sqrt{\frac{h_2^2}{h_1} + h_1 - h_2}}$

Exercice 3

On considère un cube de côté a et de masse M. Il est plongé dans un chambre de section carrée de côté $a + 2d$ et de hauteur h, remplie d'un fluide newtonien incompressible de viscosité dynamique μ et masse volumique ϱ. Le fluide remplit entièrement le volume de cette chambre et sa surface est à l'air libre. Le cube est en train de descendre vers le fond de la chambre sous l'effet de son poids. La distance d séparant la paroi du cube de celle de la chambre est petite : $d \ll a$. La pression atmosphérique est prise égale à $p_{atm} = 0$. On note $S = a^2$ l'aire d'une des faces du cube. On note $w(x)$ la vitesse du fluide dans l'interstice entre le cube et la paroi intérieure de la chambre. On travaille dans un repère cartésien tel que le montre la figure 2.

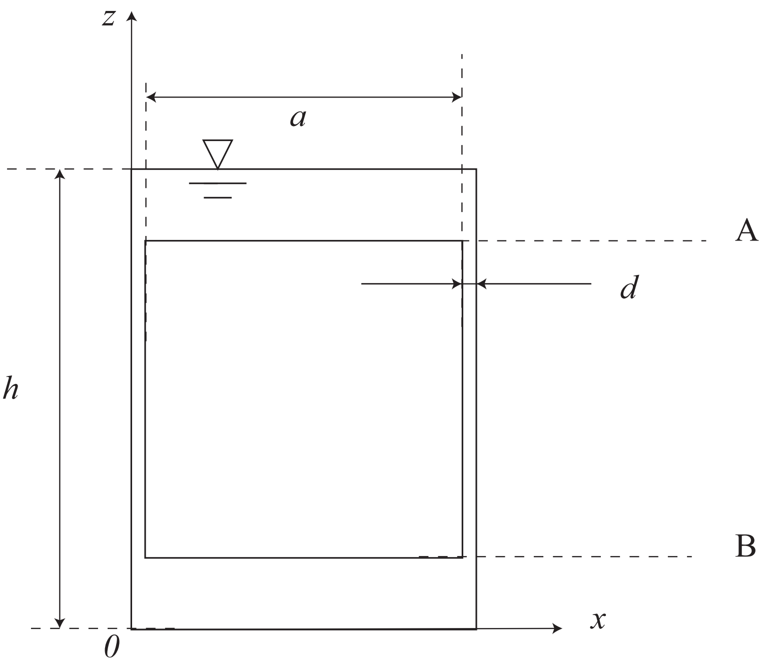

Figure 2 : bloc solide en forme de cube glissant au fond d'une chambre.

Question 13 [1 pt] Quelle est la pression qui sur la face supérieure du cube (ligne A d'altitude z_a)?

A aucune de ces réponses

B $p_a = \varrho gh$

C $p_a = \varrho g(h - z_a)$

D $p_a = \varrho hz_a$

Question 14 [1 pt] Quelle est la pression qui sur la face inférieure du cube (ligne B d'altitude z_b) en supposant que la pression du fluide doit reprendre la force exercée par le cube ?

- A $p = \varrho g(h - z_b)$
- B $p_b = Mg/S$
- C $p_b = \varrho g(h - z_a) + Mg/S$

Question 15 [1 pt] En déduire le gradient de pression vertical dans l'interstice entre le cube et la paroi intérieure de la chambre entre les cotes A et B :

- A $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = (p_a - p_b)/a = -Mg/(Sa)$
- B $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = (p_a - p_b)/a = \varrho g(z_a - z_b)/a$
- C $p = \varrho(h - z_B)/a$

Question 16 [1 pt] On fait l'hypothèse de couche mince (c'est la même hypothèse que celle utilisée en cours pour le coin d'huile et la couche limite) d'écoulement permanent pour le fluide contenu dans l'interstice. Qu'est-ce que cela veut dire ?

- A $\frac{\partial w}{\partial z} = 0$ et $\frac{\partial w}{\partial z} \ll \frac{\partial w}{\partial x}$
- B $\frac{\partial w}{\partial t} = 0$ et $\frac{\partial w}{\partial z} \ll \frac{\partial w}{\partial x}$
- C $\frac{\partial w}{\partial t} = 0$ et $\frac{\partial w}{\partial x} \ll \frac{\partial w}{\partial z}$

Question 17 [1 pt] Pourquoi peut-on considérer que la vitesse du fluide est indépendante de z dans l'interstice ?

- A parce que le fluide est incompressible.
- B parce la force de pesanteur est contrebalancée par le gradient de pression.
- C parce que le gradient de pression est nul.

Question 18 [1 pt] En vous servant de l'hypothèse de couche mince et en supposant que l'écoulement de fluide dans l'interstice est permanent avec une vitesse $w(x)$, écrire la composante verticale de la conservation de la quantité de mouvement selon Navier-Stokes.

- A $0 = -\varrho g - \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$
- B $\varrho\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \mu \frac{\partial w}{\partial x}$
- C $0 = -\varrho g - \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} + \mu \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}.$

Question 19 [1 pt] Quelles sont les conditions aux limites si la vitesse du cube est $U < 0$. On se placera ici sur la face de gauche et on considéra l'interstice $0 \leq x \leq d$.

- A $w(0) = U$ et $w(d) = 0$.
- B $w(0) = 0$ et $w(d) = 0$.
- C $w(0) = U$ et $w(d) = U$.
- D $w(0) = 0$ et $w(d) = U$.

Question 20 [1 pt] Intégrer l'équation du mouvement pour en déduire le profil de vitesse $w(x)$.

- A $w = K\frac{x^2}{2} + x\left(\frac{U}{d} - \frac{Kd}{2}\right)$ avec $K = \frac{1}{\mu}\left(\varrho g + \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\right)$.
- B aucune de ces réponses.
- C $w = \left(U + \frac{1}{2}\frac{\varrho g}{\mu}d^2\right)\frac{1}{d}$.
- D $w = U\frac{\varrho g}{\mu}x(d-x)$.

Question 21 [1 pt] Quelles sont les forces visqueuses exercées par le fluide sur le cube ?

- A $F = 4a^2\mu\left(\frac{Kd}{2} + \frac{U}{d}\right)$ avec $K = \frac{1}{\mu}\left(\varrho g + \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\right)$.
- B aucune de ces réponses.
- C $F = 4\mu a^2\frac{U}{d}$.
- D $F = 4a^2\mu\left(\frac{U}{d} - \frac{Kd}{2}\right)$ avec $K = \frac{1}{\mu}\left(\varrho g + \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\right)$.

Exercice 4

Un lac d'accumulation est muni d'un évacuateur de crue, qui se présente sous la forme d'un déversoir en béton (voir 3). Celui-ci se compose d'un radier en béton de largeur $B = 10$ m et de rugosité $K = 65$ m^3 s^{-1}. La hauteur de l'ouvrage par rapport au niveau de référence est $p' = 10$ m. Le radier a une pente de 20°. Il débouche sur un bassin amortisseur de longueur $L = 20$ m, de pente nulle et terminé par un seuil mince de pelle $p = 1$ m. L'eau est ensuite restituée à un cours d'eau de pente $i = 0{,}1$ %. La section est rectangulaire et de largeur constante $B = 10$ m.

Il se produit une crue importante, qui se traduit par une montée rapide des eaux. Le niveau d'eau dans le lac d'accumulation dépasse de $\Delta h = 50$ cm.

Répondre aux questions suivantes (chaque question rapporte 1 point).

- Calculer le débit évacué par le déversoir.
- Calculer les hauteurs normale et critique sur le coursier.
- Quel est le régime d'écoulement sur le coursier ?
- Calculer la hauteur normale et la hauteur critique dans le bassin.
- Calculer la charge à l'amont du seuil mince.
- En déduire la hauteur d'eau.
- Dans l'éventualité où un ressaut se forme, calculer les hauteurs juste à l'amont et à l'aval du ressaut. Que vaut le Froude en tête de bassin (c.-à-d. à son extrémité gauche) ? Que se passe-t-il dans ce bassin ?
- Est-ce que le bassin est suffisamment long ?
- Tracer la courbe de remous entre le déversoir et la rivière.

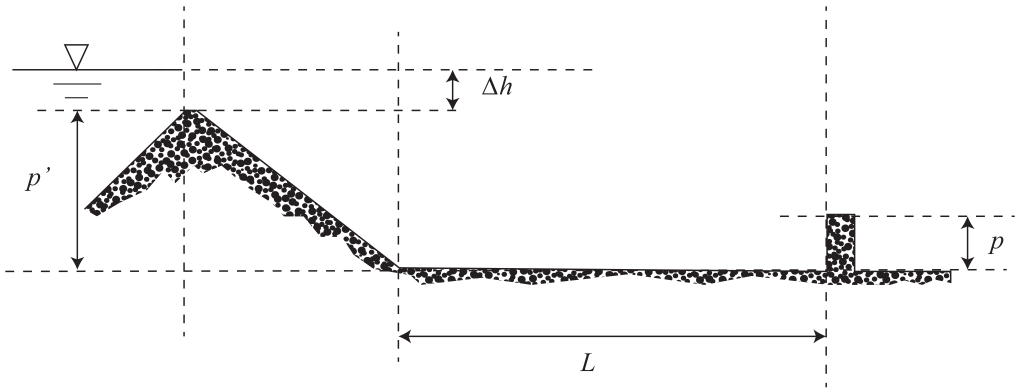

Figure 3 : schéma de l'évacuateur de crue.

Formulaire

- On supposera que les ouvrages de déversement sont parfaits (pas de perte de charge associée) et que le débit par unité de largeur est

$$q = \sqrt{g}\left(\frac{2}{3}(H-p)\right)^{3/2}$$

avec p la pelle de l'ouvrage et H la charge à l'amont de l'ouvrage.
- La longueur d'un ressaut est estimée à l'aide de

$$\frac{L}{h_1} = 220\tanh\frac{\mathrm{Fr}_1 - 1}{22},$$

avec h_1 et Fr_1 la hauteur d'eau et le nombre de Froude à l'amont du ressaut. La fonction $\tanh$ est définie comme

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

- La formule dite de conjugaison entre les deux hauteurs d'un ressaut s'écrit

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+8\mathrm{Fr}_1^2} - 1\right),$$

avec h_1 et Fr_1 la hauteur d'eau et le nombre de Froude à l'amont du ressaut, et h_2 la hauteur à l'aval du ressaut.
- Formule de Manning Strickler : contrainte pariétale pour une section de rayon hydraulique R_h et de rugosité K, $\tau_p = \varrho g \bar{u}^2/(K^2 R_h^{1/3})$.
- Condition d'équilibre du lit en régime permanent uniforme : $\tau_p = \varrho g R_h i$ pour une section de rayon hydraulique R_h et où $i = \sin\theta$.
- Formule du périmètre mouillé $R_h = S/\chi$ avec S section mouillée et χ périmètre mouillé.
- Théorème de Bernoulli : la charge $H = z + h + u^2/(2g)$ est constante le long d'une ligne de courant pour un écoulement isochore permanent.

Équations de Navier-Stokes d'un fluide incompressible. Le principe de conservation de la quantité de mouvement conduit aux formes suivantes pour un repère cartésien (x, y, z) :

$$\varrho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \varrho g_x + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right),$$

$$\varrho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \varrho g_y + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right),$$

$$\varrho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \varrho g_z + \mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right),$$

avec p pression du fluide, $\boldsymbol{u} = (u, v, w)$ les composantes du champ de vitesse, $\boldsymbol{g} = (g_x, g_y, g_z)$ l'accélération de la gravité. L'équation de continuité est

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

On rappelle que pour un volume de contrôle matériel, la conservation de la masse ou de la quantité de mouvement peut s'écrire en s'aidant du théorème de Reynolds

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V f\mathrm{d}V = \int_V \frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}V + \int_S f\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S,$$

avec $f = \varrho$ pour la conservation de la masse et $f = \varrho\boldsymbol{u}$ pour la quantité de mouvement, S la surface de contrôle, et $\boldsymbol{n}$ la normale à la surface S. Si le calcul se fait sur un volume de contrôle arbitraire V_a qui se déplace avec la vitesse $\boldsymbol{w}$ alors il faut tenir compte de la vitesse de déplacement des frontières de V_a qui n'est pas celle du fluide

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V f\mathrm{d}V = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V_a} f\mathrm{d}V + \int_{S_a} f(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{w})\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S,$$

où l'on considère qu'à l'instant t, le volume matériel coïncide avec le volume arbitraire. Les équations de conservation s'écrivent

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \varrho\mathrm{d}V = 0$$

pour la masse et

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \varrho\boldsymbol{u}\mathrm{d}V = \sum \text{forces appliquées},$$

pour la quantité de mouvement.