



Chapitre 4 : vagues

Hydraulique à surface libre

Christophe Ancey

Chapitre 4 : équations de base en hydraulique



- Phénomènes physiques
- Ondes dynamiques et équations de Saint-Venant
- Équations d'Airy
- Vagues
- Tsunami
- Vagues d'impulsion
- Mascaret
- Houle
- Roll waves (trains d'onde)

Phénomènes physiques



Un nom... et beaucoup de choses derrière

Une multitude de phénomènes

- ordinairement : des ondulations de la surface d'une étendue d'eau qui peuvent être décrites à l'aide de modèles simples
- parfois, des vagues exceptionnelles dites scélérates (*rogue wave* en anglais)
- des vagues causées par d'autres processus
 - impact d'une masse : vague d'impulsion
 - tremblement de terre : tsunami, seiche
 - marée : mascaret
 - instabilité de surface : train d'onde

Du clapotis au mur d'eau



Impact des vagues

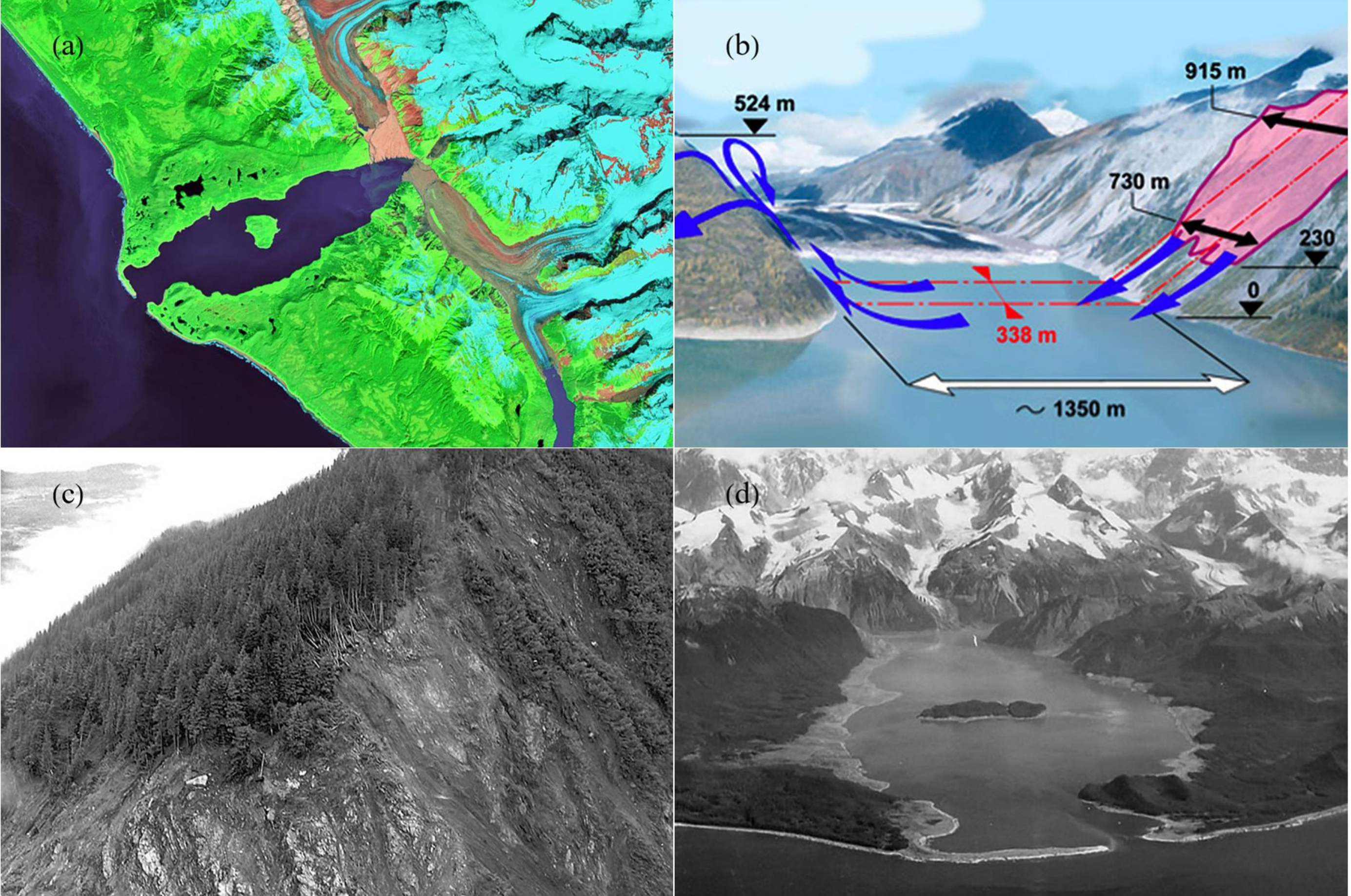


Impact des vagues (2)

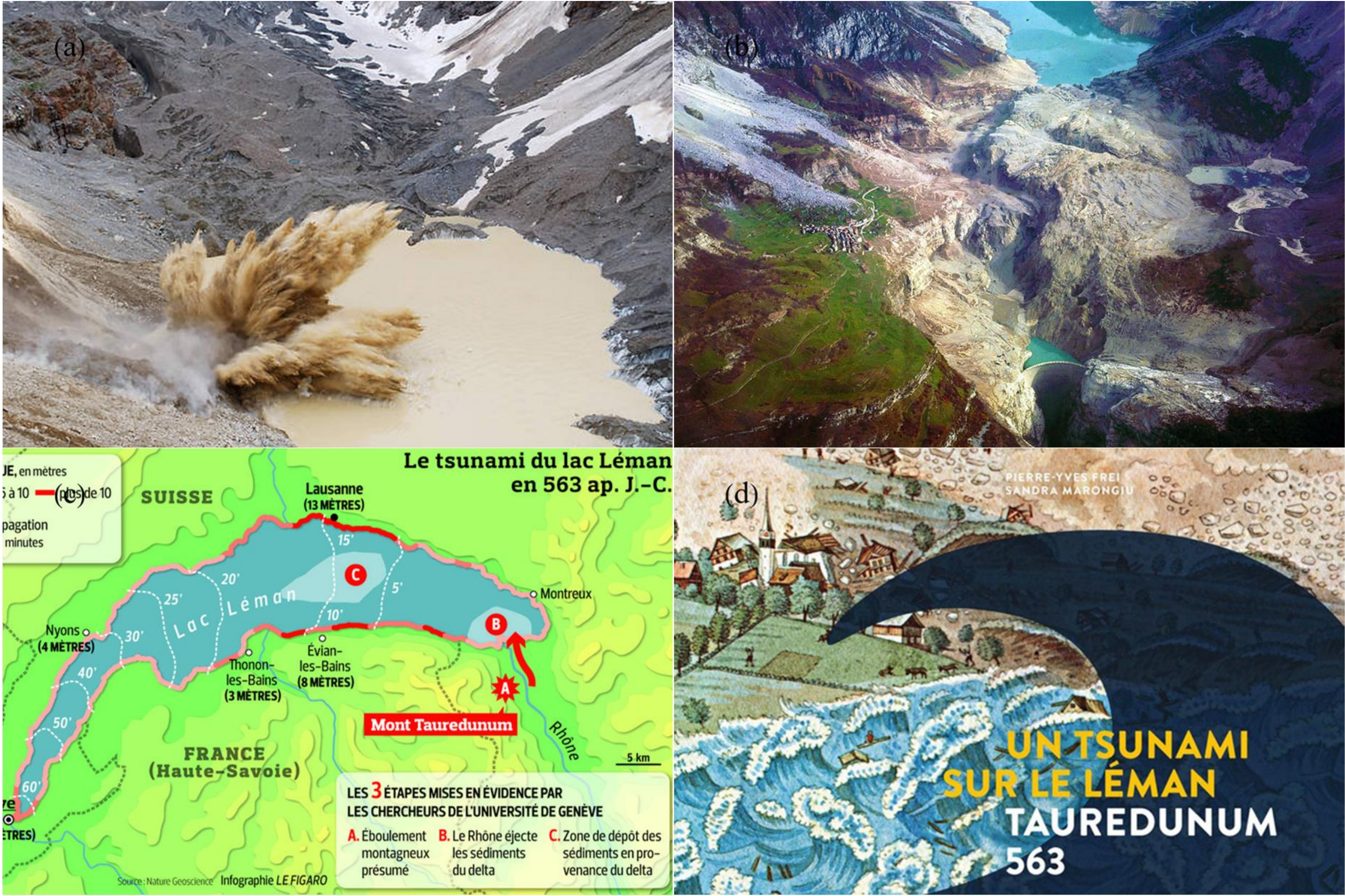
Étrave du navire (tanker) norvégien Wilstar endommagée par une vague scélérate en 1974



Vague d'impulsion : Lituya Bay (1958)



Vague d'impulsion (2)



Vague d'impulsion : catastrophes en Suisse



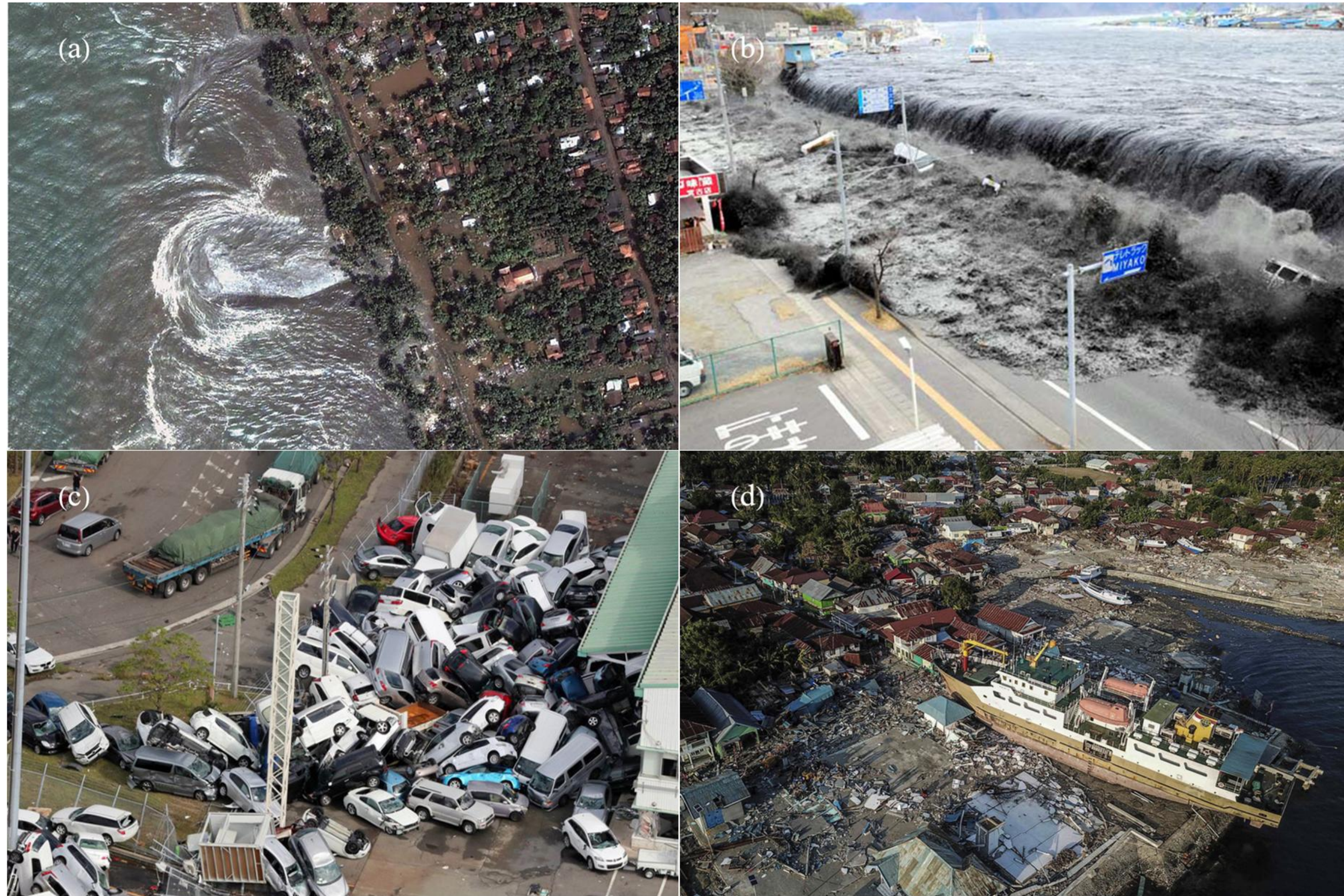
Date	Lieu	Cause	Dommmages
563	lac Léman	séisme ?	tsunami sur le lac Léman
1435	lac de Zoug	rupture d'une berge	60 morts, 26 maisons détruites
1795	lac des 4 Cantons (Weggis)	glissement de terrain	400 sans-abris, 33 bâtiments détruits
1801	lac des 4 Cantons (Sisikon)	éboulement rocheux	10 morts, plusieurs bâtiments détruits
1806	lac de Lauerz (Goldau)	éboulement rocheux	457 morts
1862	lac de Lugano (Morcote)	glissement de terrain	1 mort
1887	lac de Zoug (Zoug)	rupture des quais	650 sans-abris, 20 habitations détruites
1891	lac Léman (Montreux)	rupture des quais	72 m de quai détruits
1923	lac de Davos	rupture d'une berge	1 mort
1946	lac de Walenstadt	éboulement rocheux	1 mort
1963	lac des 4 Cantons (Obermatt)	éboulement rocheux	2 morts

Vague d'impulsion : catastrophes dans le monde



<i>Date</i>	<i>Lieu</i>	<i>Pays</i>	<i>Volume [Mm³]</i>	<i>Runup [m]</i>	<i>Victimes</i>
22/02/1756	Tjelle	Norvège	15	46	38
21/05/1792	Shimabara	Japon	500	10	~ 15000
27/08/1883	Krakatau	Indonésie		35	~ 36000
13/03/1888	Ritter Island	Papouasie	5000	20	~ 100
04/07/1905	Disenchantment Bay	EUA	29	35	0
07/04/1934	Tajford	Norvège	2	62	41
13/09/1936	Ravnefjell	Norvège	1	74	73
09/07/1958	Lituya Bay	EUA	31	524	2
22/03/1959	Pontesei	Italie	5		1
09/10/1963	Vajont	Italie	240	270	~ 2000
18/03/1971	lac Yanahuin	Pérou	0,1	30	~ 500
18/05/1980	Mount St. Helens	EUA	430	200	0

Tsunami



Tsunami : du mythe de l'Atlantide au film hollywoodien



Tsunamis (3)

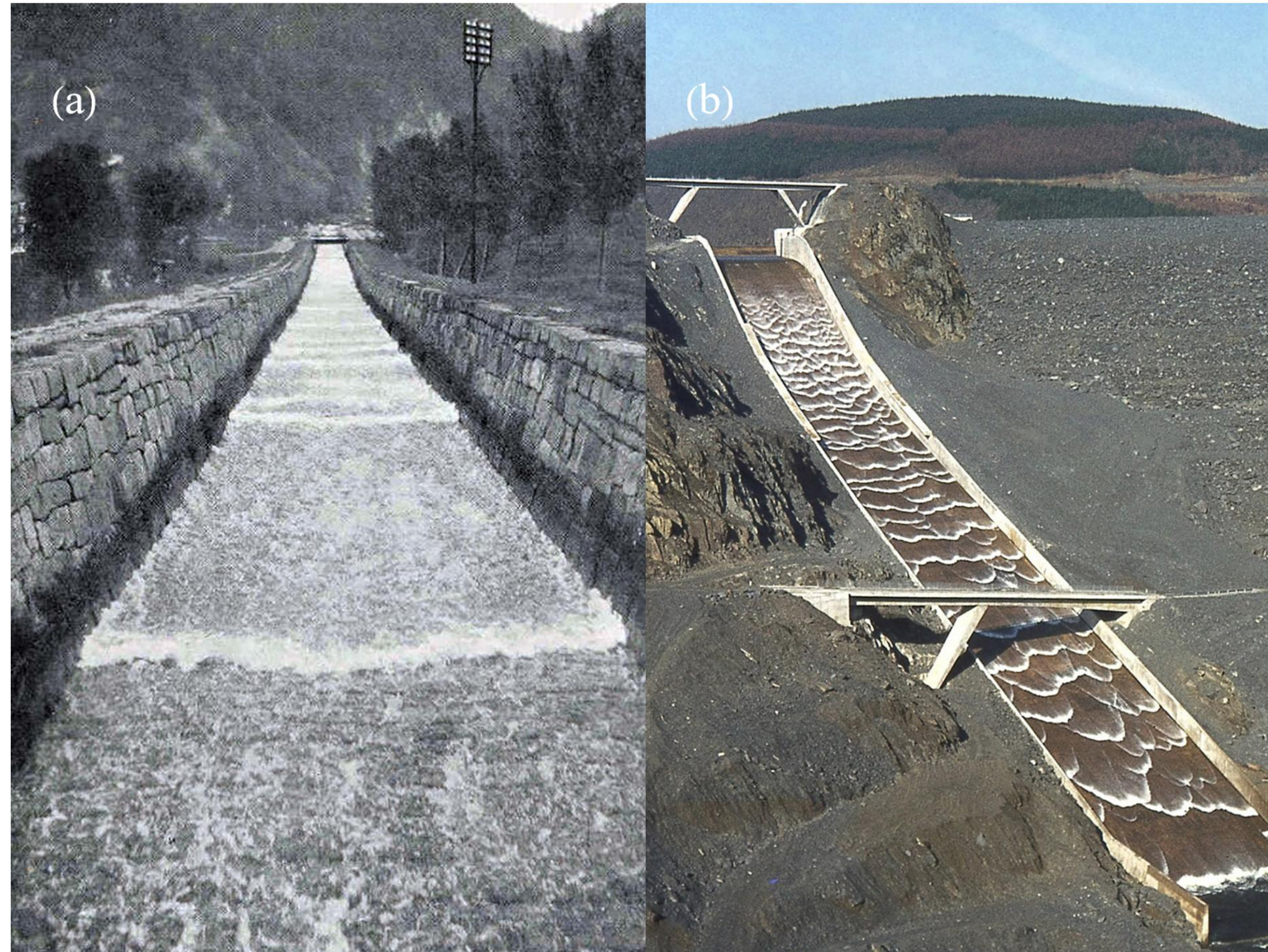


<i>Date</i>	<i>Zone concernée</i>	<i>nombre de victimes</i>	<i>hauteur de vague</i>
28 sep. 2018	Indonésie, Anak Krakatoa	2256	6 m
11 mars 2011	Japon, Tohoku	18 457	30 m
26 déc. 2004	sud-est Asie	>250 000	30 m
17 août 1999	Turquie, Izmit	17 480	3 m
17 jui. 1998	Papouasie	2000	15 m
12 déc. 1992	Indonésie	2200	26 m
17 août 1976	Indonésie	5000	5 m
22 mai 1960	Chili, Valdivia	5700	25 m
28 déc. 1908	Italie, Messine	98 000	13 m
27 août 1883	Océan indien, Krakatoa	36 000	40 m
21 mai 1792	Japon	15 000	55 m
24 avr. 1771	Japon, Ryukyu	13 486	85 m
1 nov. 1755	Portugal	90 000	18 m

Mascarets



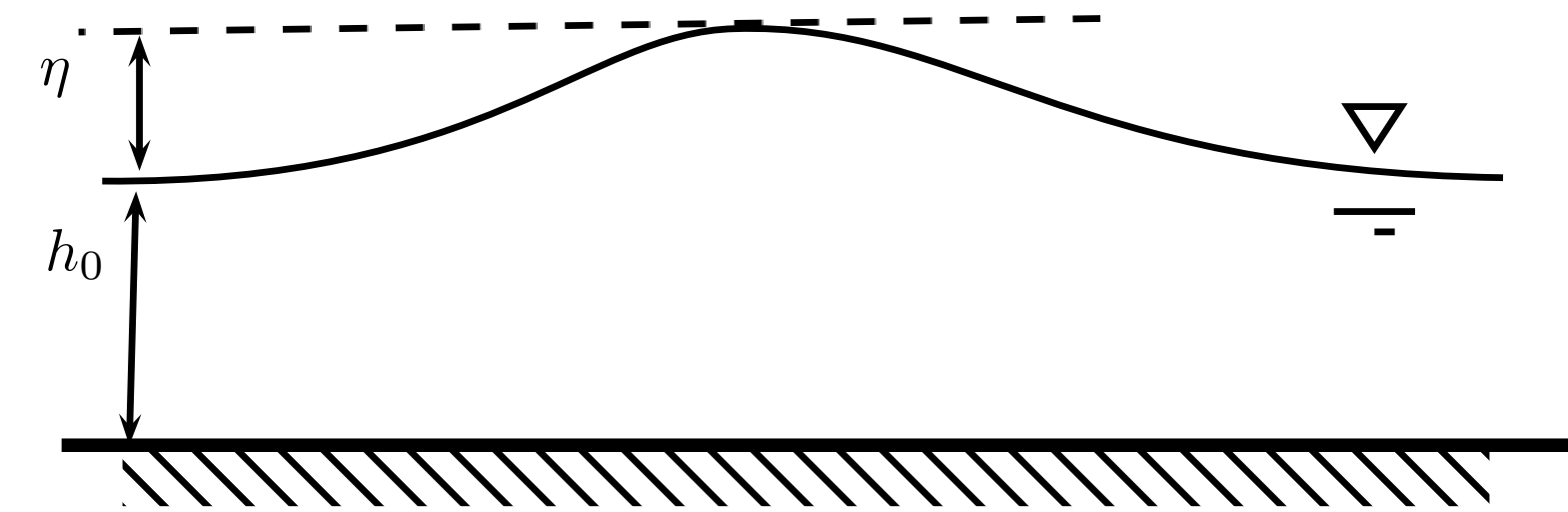
Trains d'ondes



Ondes dynamiques et équations de Saint-Venant



Les ondes dans les équations de Saint-Venant



Considérons une intumescence d'épaisseur η à la surface d'une étendue d'eau au repos de profondeur h_0 . Pour les ondes linéaires, il n'y a pas de transport de masse, donc $d(\eta u) = 0$. Considérons l'équation de continuité des équations de Saint Venant

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h \bar{u}}{\partial x} = 0$$

avec $h = h_0 + \eta$, soit encore

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + h_0 \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = 0$$

Équation de conservation de la quantité de mouvement

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = -g \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\tau_p}{\rho h}$$

En linéarisant l'équation (omission de $\bar{u} \partial_x \bar{u}$) et en considérant le fluide non visqueux ($\tau_p = 0$) :

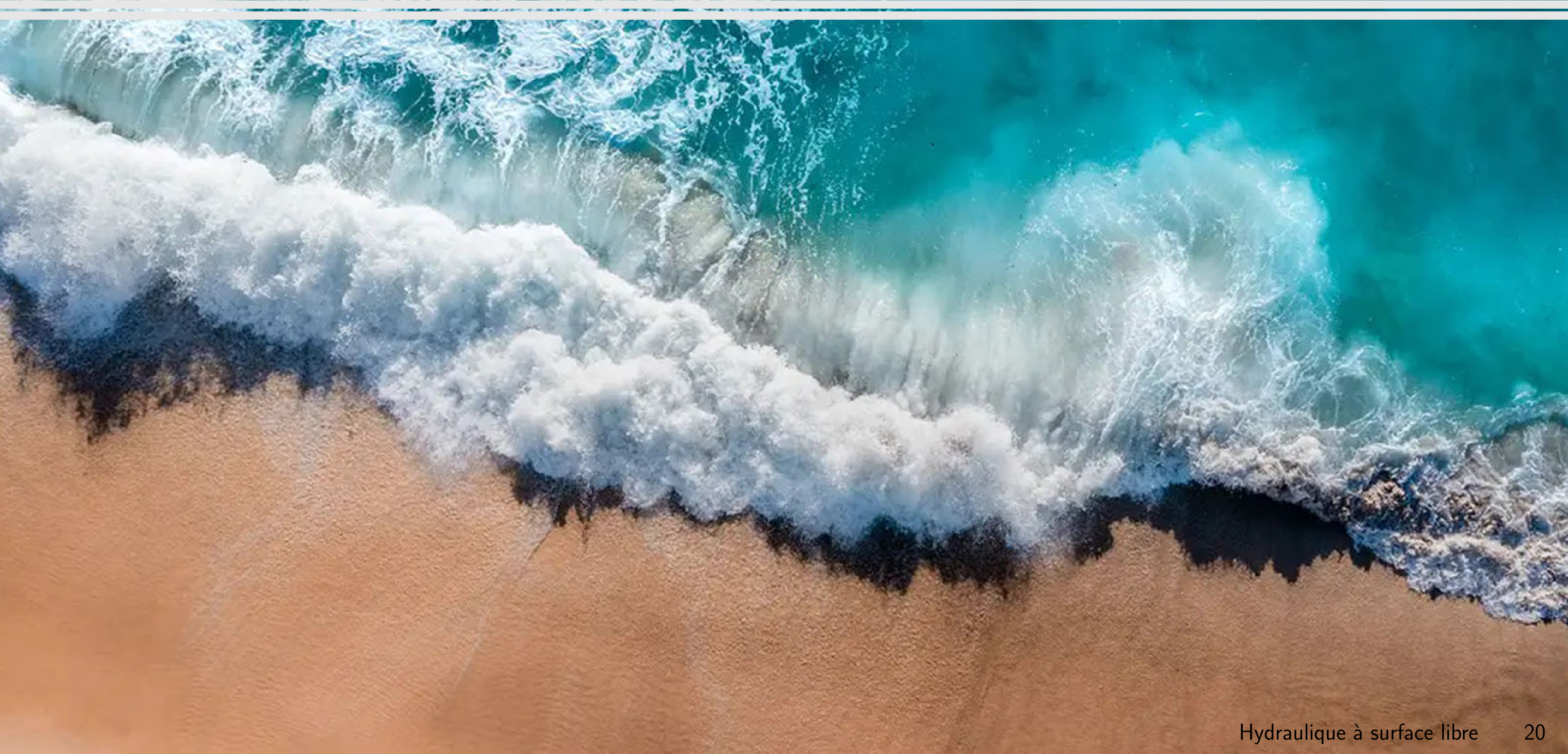
$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

Combinant équation de la masse et équation linéarisée de quantité de mouvement :

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = gh_0 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$$

C'est l'équation typique des ondes dynamiques (chap. 1) avec $c = \sqrt{gh_0}$.

Équations d'Airy



Pour un fluide non visqueux équations d'Euler :

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \\ \frac{d\mathbf{u}}{dt} &= \mathbf{g} - \frac{1}{\rho} \nabla p\end{aligned}$$

Si de plus, l'écoulement est irrotationnel ($\nabla \times \mathbf{u} = 0$), alors il existe un potentiel des vitesses

$$\phi : \mathbf{u} = \nabla \phi$$

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \text{ et } v = \frac{\partial \phi}{\partial y}.$$

L'équation de continuité montre que ϕ vérifie l'équation de Laplace

$$\nabla^2 \phi = 0$$

L'équation de quantité de mouvement peut se simplifier (avec du travail...)

$$\frac{\partial \nabla \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla (\nabla \phi \cdot \nabla \phi) = \mathbf{g} - \frac{1}{\rho} \nabla p$$

soit encore en intervertissant les opérateurs de différentiation spatiales et temporelle :

$$\nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi \right) = \nabla \left(-\psi - \frac{1}{\rho} p \right)$$

avec ψ le potentiel gravitaire ($\mathbf{g} = -\nabla \psi$). C'est l'équation de Bernoulli (la vitesse a été remplacée par le potentiel $\nabla \phi$). Après intégration

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\psi - \frac{1}{\rho} p.$$

Condition aux limites au fond ($y = 0$) et à la surface libre ($y = h$)

$$v(x,0,t) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \text{ et } v(x,y = h,t) = \frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} \text{ en } y = h$$

Méthode de résolution : séparation des variables. Recherchons des solutions sous forme d'onde progressive :

$$\phi(x, y, t) = F(x - ct)G(y)$$

Si on substitue cette forme dans l'équation de Laplace $\nabla^2\phi = 0$

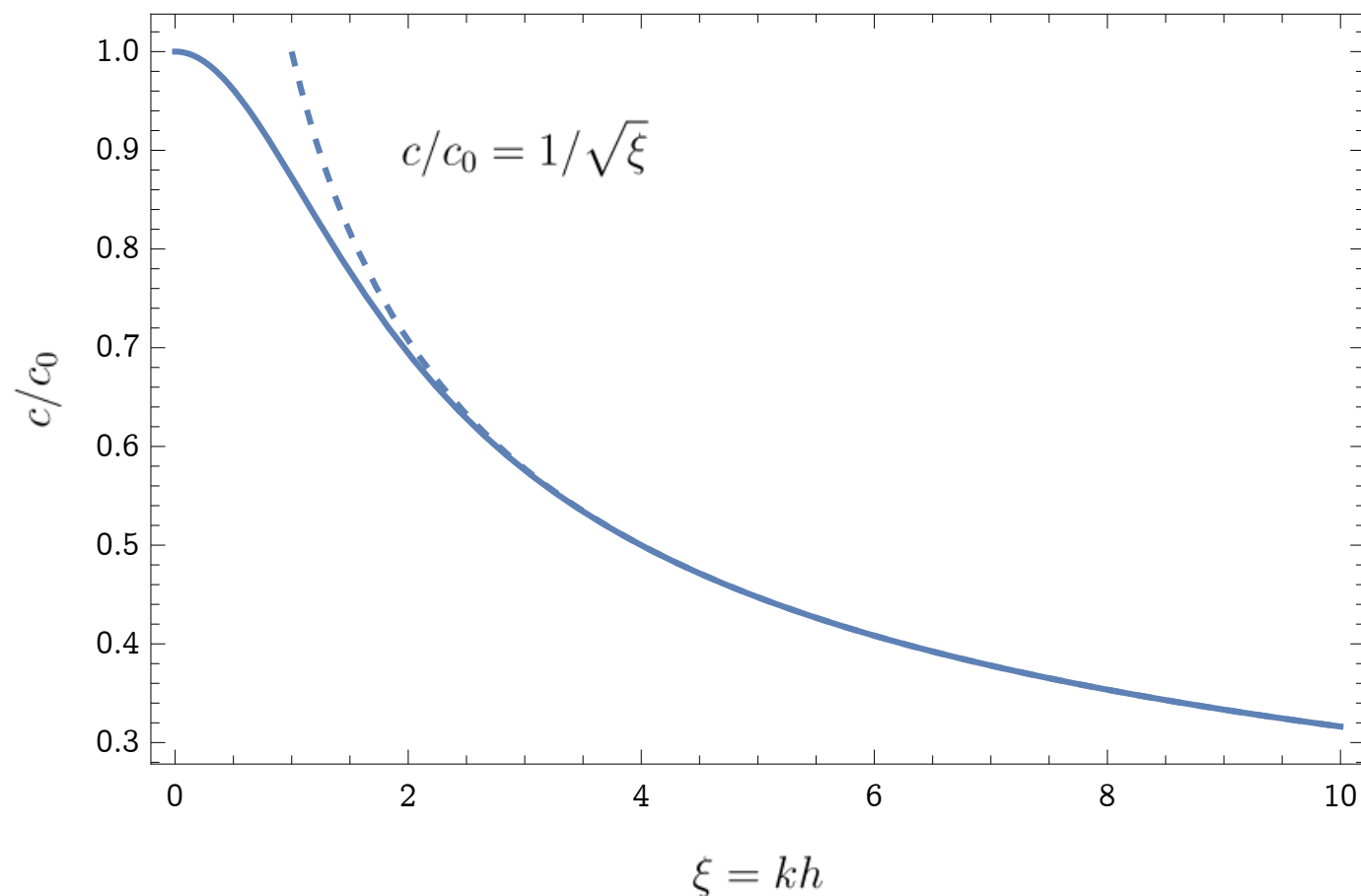
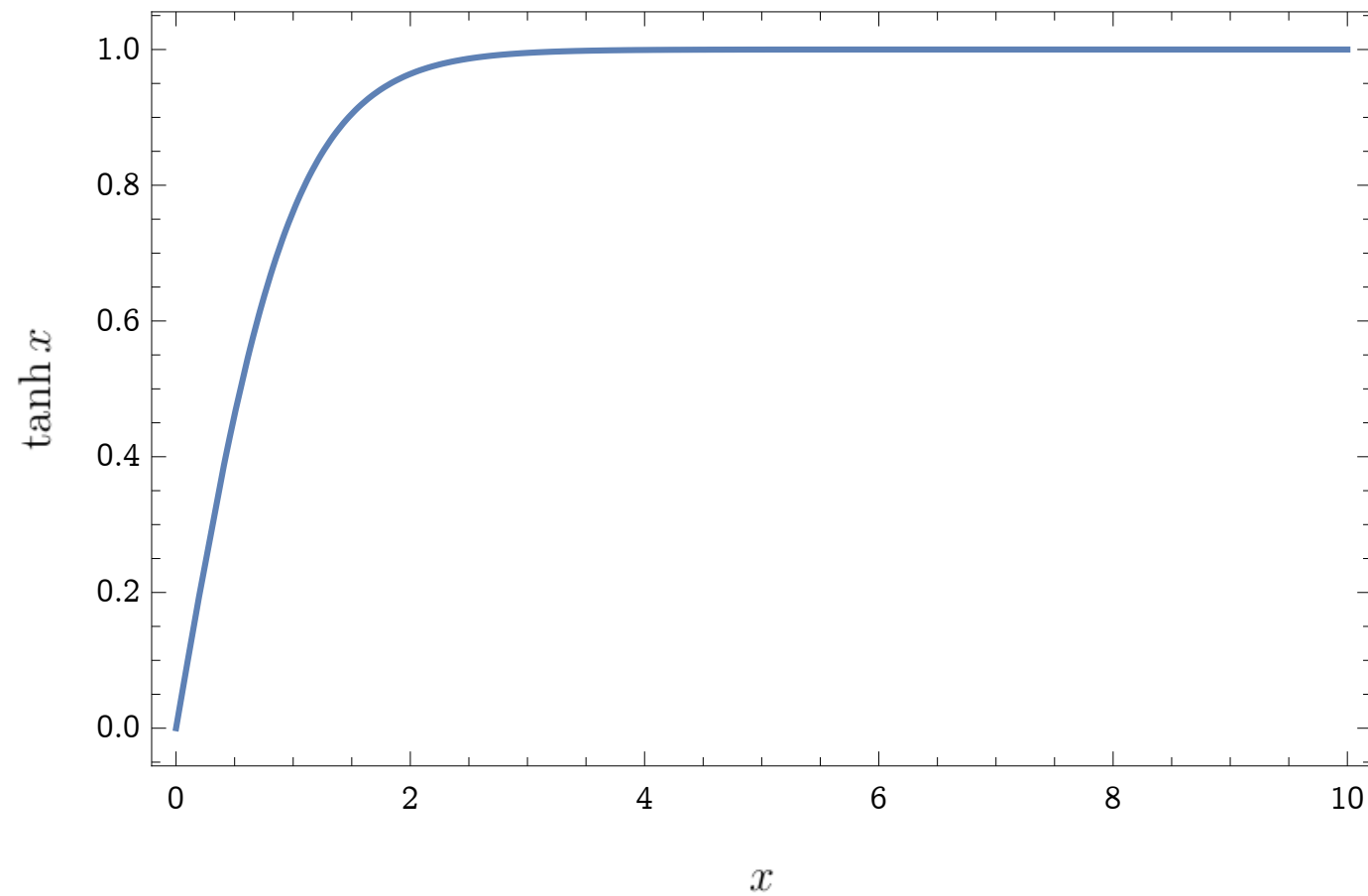
$$\frac{F''}{F} = -\frac{G''}{G} = -k^2,$$

avec k une constante (k est interprétée par la suite comme le *nombre d'onde*). La solution générale est :

$$F = A \cos[k(x - ct)] + B \sin(x - ct) \text{ et } G = Ce^{ky} + De^{-ky}. \quad (1)$$

Pour déterminer la relation de dispersion et les constantes d'intégration A , B , C , et D , il faut prendre en compte les conditions aux limites.

Équations d'Airy (4)



Notons aussi qu'à la surface libre, on a une relation approchée de la forme :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -g \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

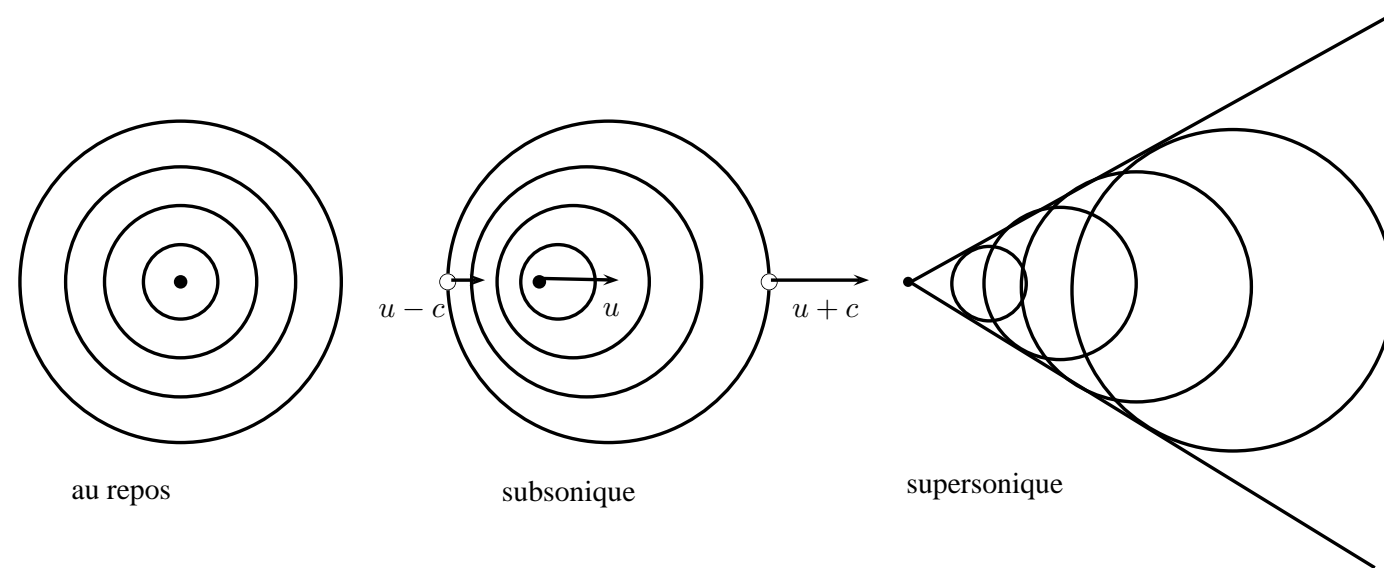
C'est l'équation des ondes de surface d'un courant d'eau. Une fois les constantes d'intégration obtenues, on obtient :

$$c^2 = \left(\frac{\omega}{k}\right)^2 = \pm \frac{g}{k} \tanh(kh) \Rightarrow c = \pm \frac{c_0}{\sqrt{\xi}} \tanh \xi$$

avec $\xi = kh$. Trois remarques :

- des ondes dans les deux sens
- eau profonde $\xi = kh \gg 1$, $c \approx c_0 \xi^{-1/2}$. La vitesse dépend de la longueur d'onde !
- eau peu profonde $\xi = kh \ll 1$, $c \approx c_0$. La vitesse est indépendante de la longueur d'onde.

Équations d'Airy (5)



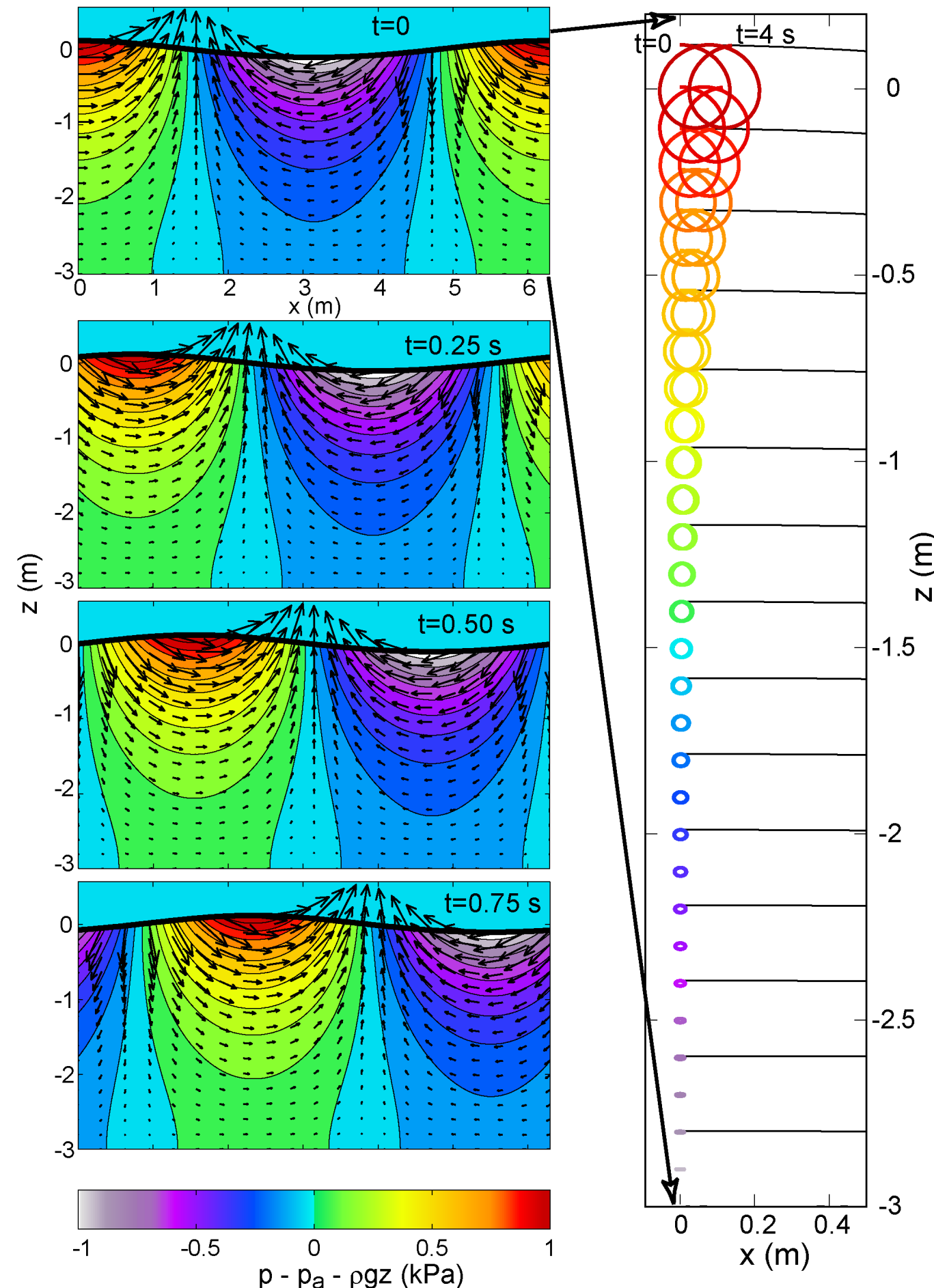
Les ondes de gravité se propagent donc à la vitesse $c = \bar{u} \pm \sqrt{gh}$, soit encore :

$$c = \sqrt{gh}(Fr \pm 1),$$

avec $Fr = \bar{u}/\sqrt{gh}$ le nombre de Froude. Conséquence :

- en régime subcritique $Fr < 1$, les ondes se propagent d'amont vers l'aval et d'aval vers l'amont
- en régime supercritique $Fr > 1$, les ondes se propagent d'amont vers l'aval uniquement. L'information ne se propage que dans le sens de l'écoulement

Équations d'Airy (6)



Le champ de vitesse dans la théorie d'Airy s'obtient à partir du potentiel de vitesse :

$$\phi = \frac{\omega}{k} a \frac{\cosh[k(z+h)]}{\sinh(kh)} \sin(kx - \omega t) \quad (2)$$

d'où :

$$u(x, y, t) = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\omega}{2} H \frac{\cosh[k(z+h)]}{\sinh[kh]} \cos(kx - \omega t)$$

$$v(x, y, t) = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\omega}{2} H \frac{\sinh[k(z+h)]}{\sinh[kh]} \sin(kx - \omega t)$$

Vitesse de groupe et propagation d'énergie.

Énergie potentielle de la vague moyennée sur la période T et la longueur d'onde λ est par unité de surface :

$$E_p = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda dx \left[\frac{1}{T} \int_0^T dt \left(\int_0^{\eta(x, t)} \rho g y dy \right) \right] = \rho g \frac{H^2}{16} \quad (3)$$

avec $\eta(x, t) = H \cos(kx - \omega t)/2$ la position de la surface libre. L'énergie cinétique par unité de surface est

$$E_c = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda dx \left[\frac{1}{T} \int_0^T dt \left(\int_{-h}^{\eta(x, t)} \rho \frac{u^2 + v^2}{2} dy \right) \right]$$

Au premier ordre en η

$$E_c \approx \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda dx \left[\frac{1}{T} \int_0^T dt \left(\int_{-h}^0 \rho \frac{u^2 + v^2}{2} dy \right) \right]$$

soit encore

$$E_c = \rho \frac{\omega^2}{32k} H^2 \frac{\sinh(2kh)}{\sinh(kh)^2} + O(\eta) = \rho \frac{\omega^2 H^2}{16k} \frac{1}{\tanh(kh)}$$

En se servant de la relation de dispersion, on aboutit à

$$E_c = \rho g \frac{H^2 \omega^2}{16 c^2 k^2} = \rho g \frac{H^2}{16}$$

Pour les ondes d'Airy, les énergies potentielles et cinétiques sont égales et l'énergie totale est

$$E = E_c + E_p = \rho g \frac{H^2}{8}$$

Cette énergie se propage à la vitesse de groupe

$$c_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk} \left(k \sqrt{\frac{g}{k} \tanh(kh)} \right) = \frac{1}{2} c \left(1 + \frac{2kh}{\sinh(2kh)} \right)$$

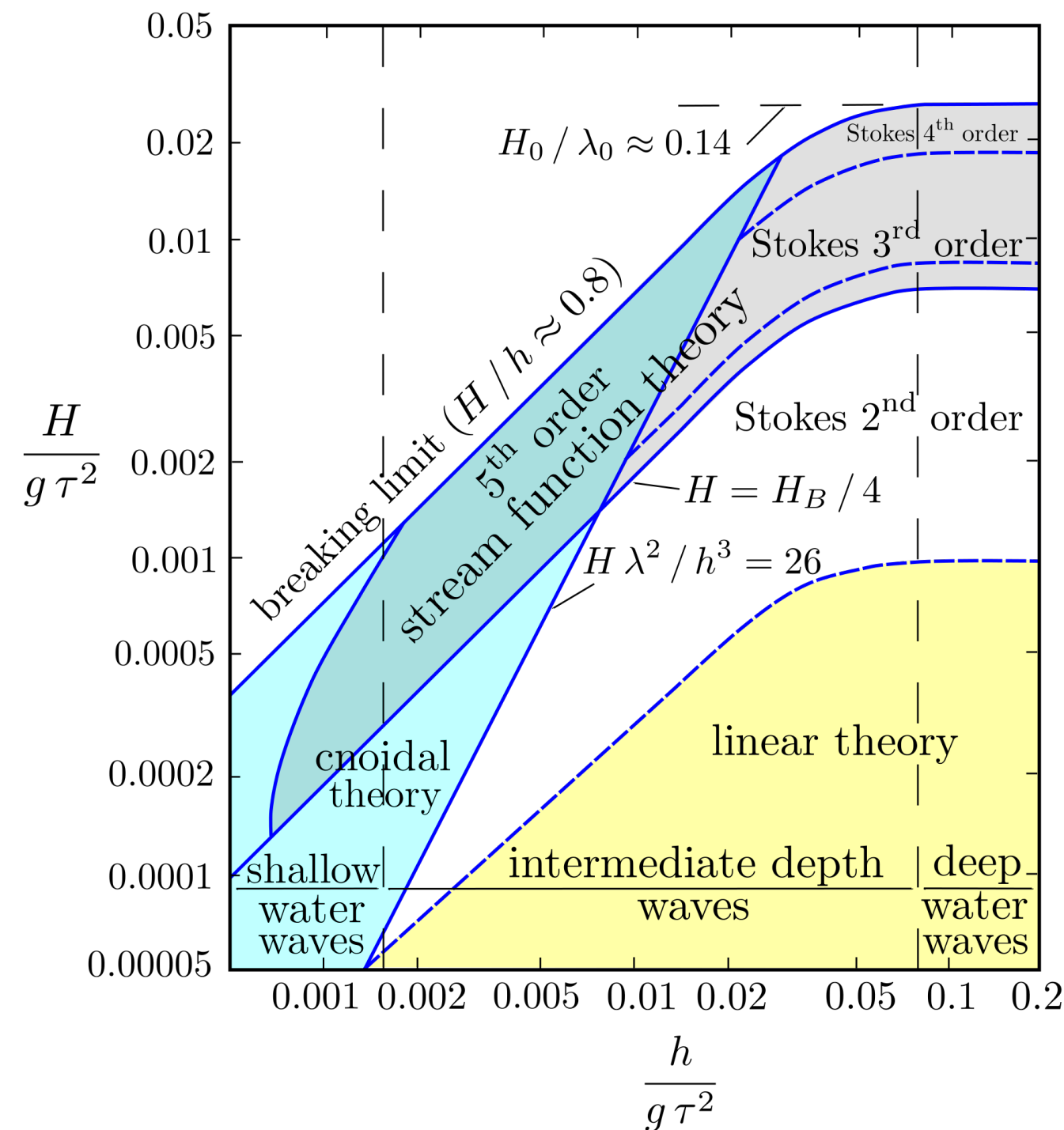
En eau profonde, dès que $kh > 2$, la vitesse de groupe vaut à peu près la moitié de la célérité des ondes tandis qu'en eau peu profonde, quand $kh \ll 1$, alors onde et énergie se déplacent à la même vitesse.

A.N. Ainsi, un fort vent de force Beaulieu 8 (environ 70 km/h) peut produire des hauteurs de vague $H \geq 5$ m, soit des énergies $E \geq 30$ kJ/m² de surface maritime

Vagues



Classification des vagues



H hauteur de vague, τ période

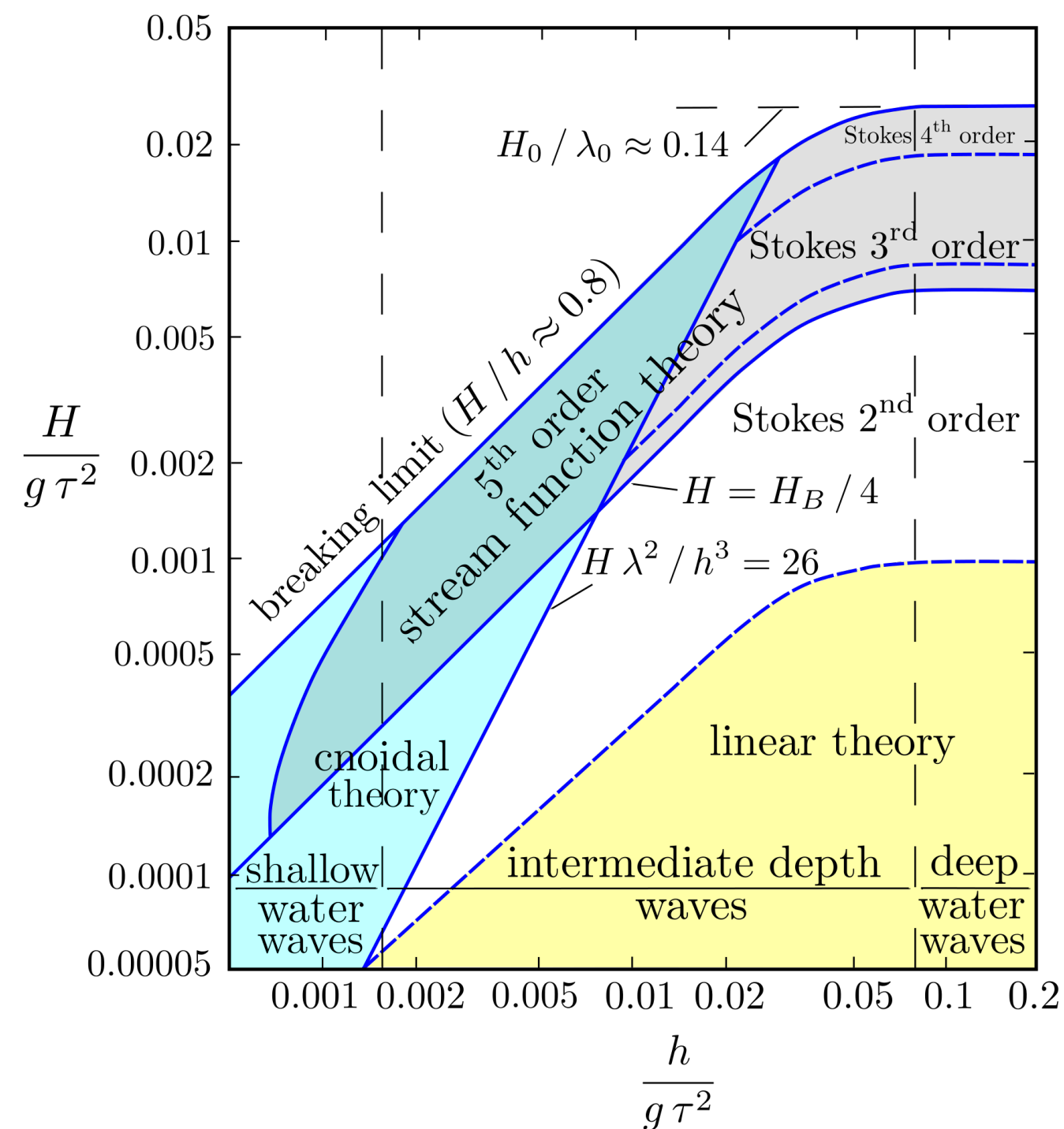
Selon l'origine des ondes, on distingue

- vague causée par le vent (forçage météorologique) : *houle*
- vague causée par les mouvements de la lune (forçage astronomique) : *marées*
- vague causée par les tremblements de terre : *tsunamis*

Selon le mécanisme physique qui est impliqué dans la propagation des ondes, on distingue :

- force motrice due à la gravité : *onde gravitaire*
- vague due aux forces de tension à la surface de l'eau : *onde capillaire*

Classification des vagues (2)



Selon la longueur d'onde, on distingue le rapport λ/h (avec λ la longueur d'onde, h la hauteur d'eau) :

- $\lambda/h \leq 2$, les ondes en eau profonde ou bien des *ondes courtes*
- $2 < \lambda/h \leq 20$, les ondes intermédiaires (ou ondes de transition)
- $\lambda/h > 20$, les ondes en eau peu profonde ou bien des *ondes longues*

On définit le nombre d'Ursell.

$$U = \frac{H \lambda^2}{h^3} \quad (4)$$

Pour des ondes longues ($kh \ll 1$), le nombre d'Ursell correspond – à une constante multiplicative près – au rapport des amplitudes de la solution d'ordre 2 sur la solution du premier ordre en $\epsilon = kA$ (k nombre d'onde, A amplitude de la vague) lorsqu'on résout l'équation du mouvement (tirée de Bernoulli) vue lors de la dérivation du modèle d'Airy (slide 22).

Une onde est dite *linéaire* lorsqu'elle représente la solution à l'équation du mouvement (linéarisée) qui est une équation différentielle linéaire. Elle se présente sous la forme d'harmoniques. En pratique, le domaine linéaire correspond $U < 100$.

La théorie des ondes non linéaires s'applique dès lors que le cadre d'approximation des ondes linéaires n'est

plus valable. Parmi les ondes non linéaires, on distingue :

- *ondes cnoïdales* : ce sont des solutions de l'équation de Korteweg-de-Vries
- *ondes de Stokes*
- *ondes solitaires ou solitons*

Ondes linéaire et non linéaire (2)



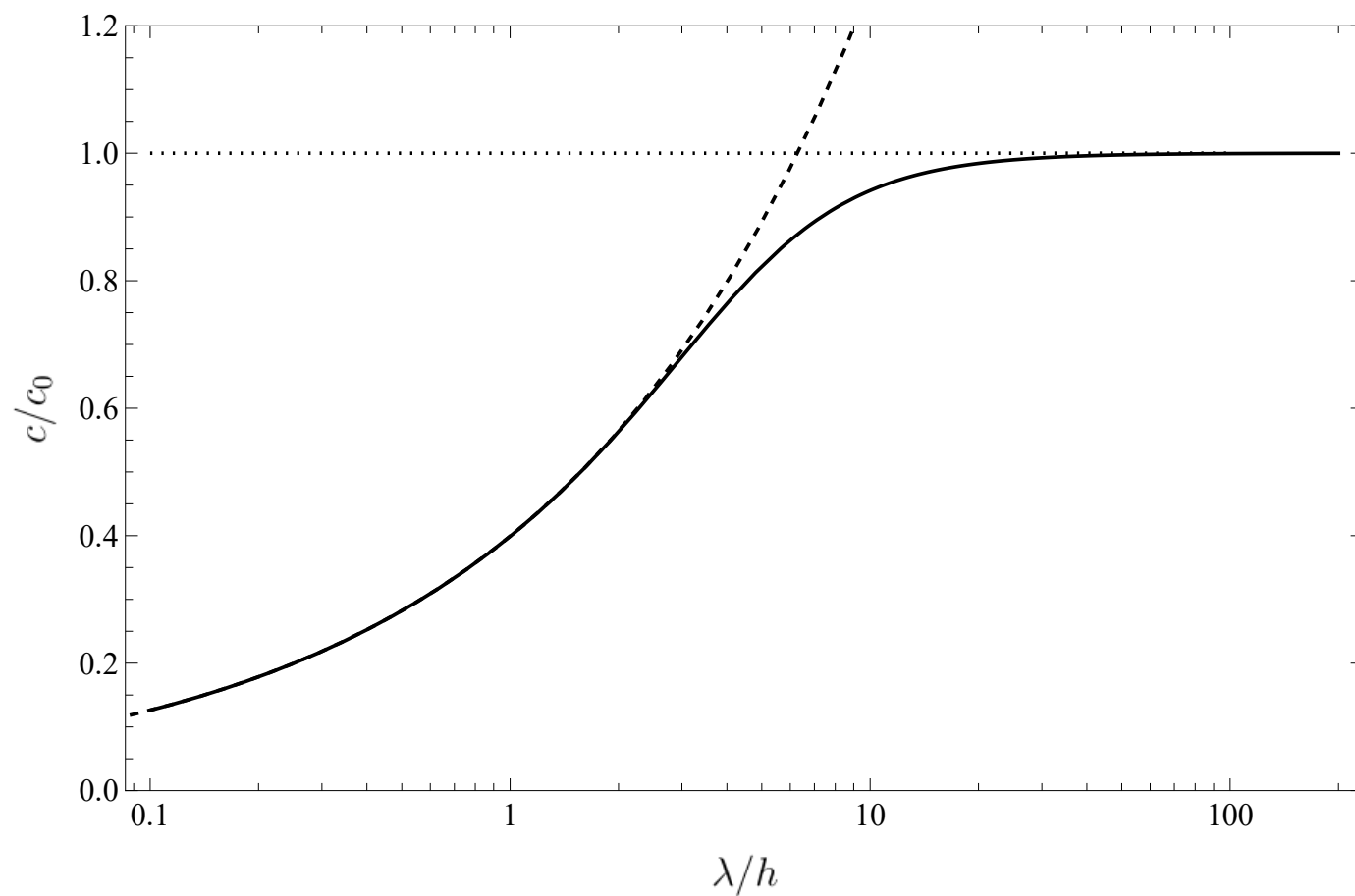
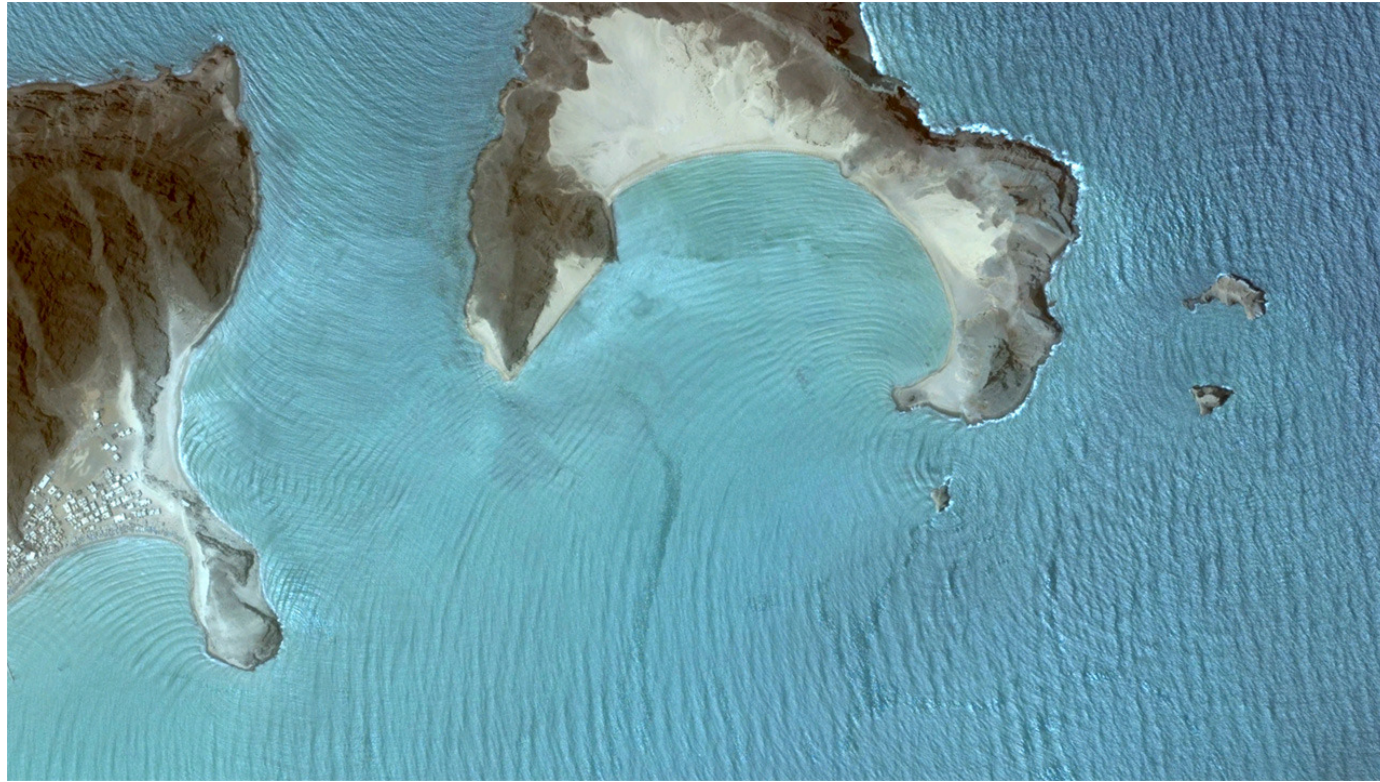
Modèle de Saint-Venant

Modèle de type Boussinesq (SGN)

Ondes linéaire et non linéaire



<i>Onde :</i>	<i>linéaire</i>	<i>Stokes</i>	<i>cnoïdale</i>	<i>solitaire</i>	<i>mascaret</i>
<i>Valeurs de U</i>	$U \rightarrow 0$	$U < 10$	$U > 25$	$U \sim 1$	$U \gg 1$
<i>Périodicité</i>	périodique	périodique	périodique	période infinie	période infinie
<i>Creux</i>	creux et crêtes identiques	creux plats, crêtes pointues	creux plats, crêtes pointues	pas de creux	pas de creux
<i>Transport de masse</i>	nul	faible	faible	fort	fort
<i>Incorporation d'air</i>	nulle	faible	faible	fort	fort
<i>Rapport λ/H</i>	$\lambda/H > 150$	$2 < \frac{\lambda}{H} < 20$	$\lambda/H > 10$	infini	infini



Rappels

- domaine nombre d'Ursell $U \ll 100$
- modèle théorique : Airy
- solution composée d'harmoniques $\eta = A \cos[k(x - ct)]$
- relation de dispersion

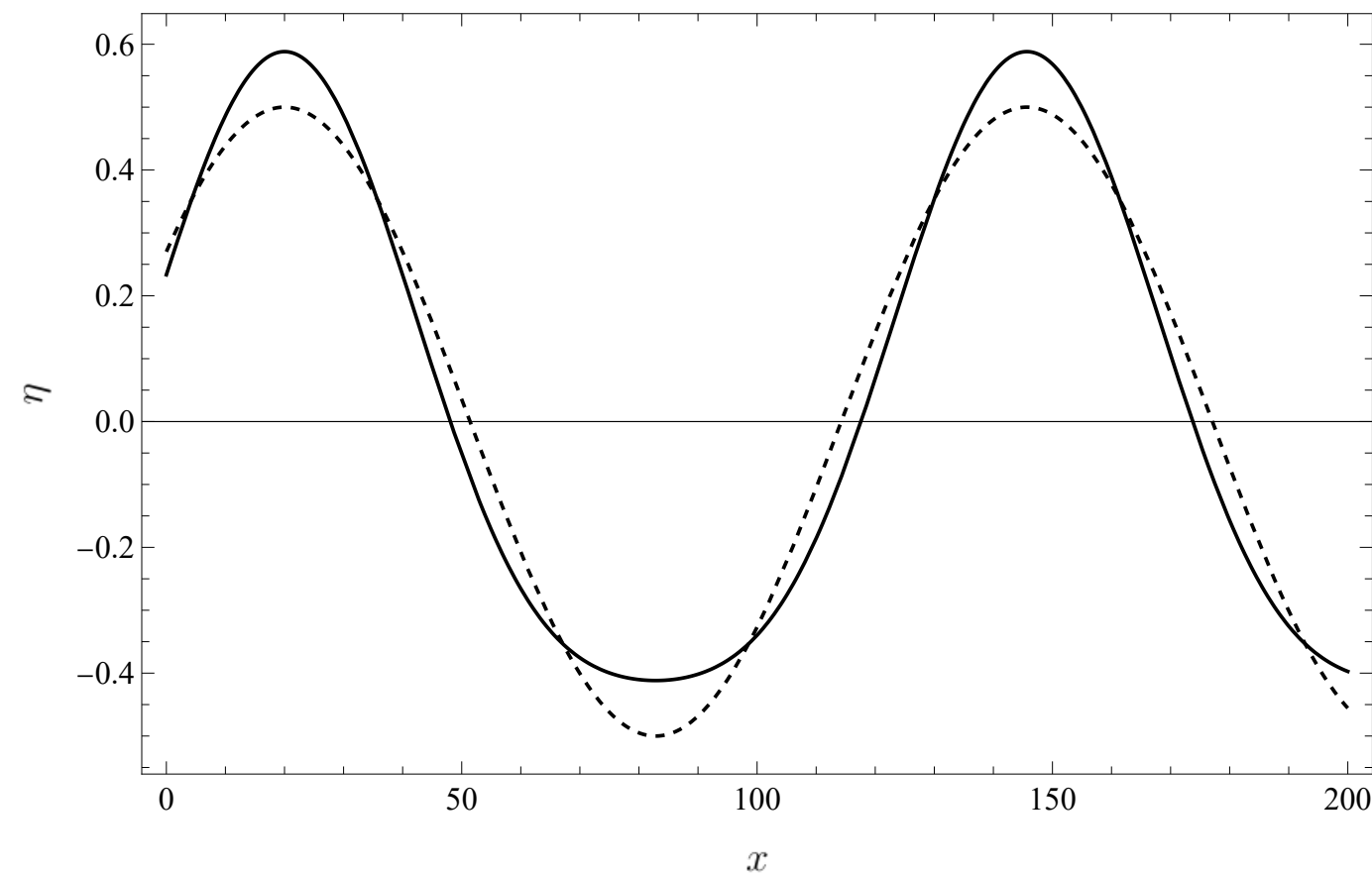
$$c^2 = \frac{g}{k} \tanh(kh) = \frac{c_0^2 \lambda}{2\pi h} \tanh\left(2\pi \frac{h}{\lambda}\right)$$

- en eau peu profonde ($kh \ll 1$) $c \rightarrow c_0 = \sqrt{gh}$ et en eau profonde, $c = \sqrt{g/k}$

Ondes de Stokes



Calcul avec $H = 1$ m, $\omega = 1$ s⁻¹, $t = 1$ s, et $h = 10$ m.



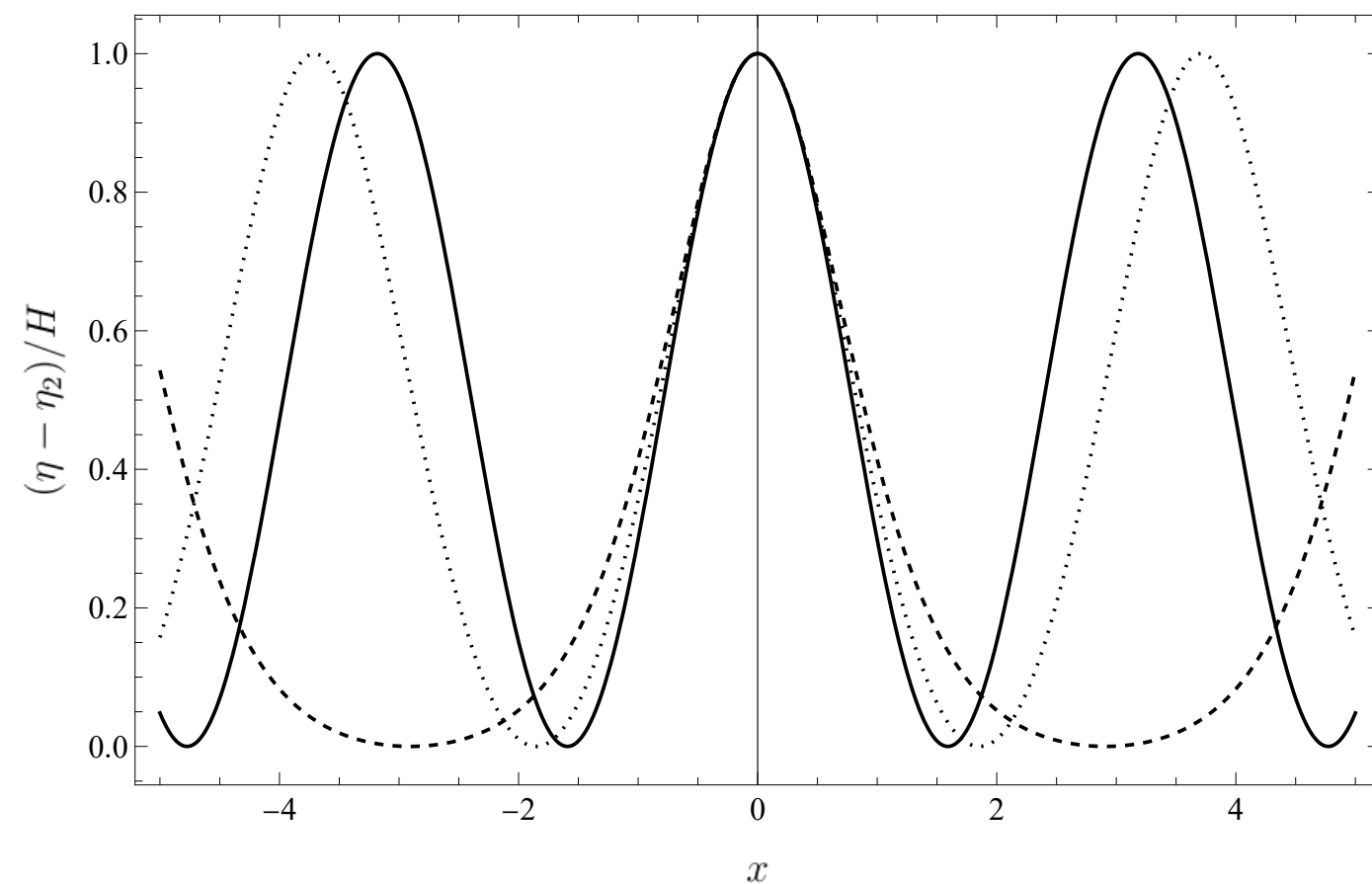
Les ondes de Stokes sont proches des ondes linéaires : ce sont des ondes périodiques, et le profil de hauteur comporte une harmonique (partie linéaire) et une contribution non linéaire représentant les effets d'ordre supérieur quand λ/h

$$\eta(x, t) = \frac{1}{2} \cos(t\omega - kx) + \frac{1}{16} k H^2 \frac{\cosh(kh)}{\sinh^3(kh)} (\cosh(2hk) + 2) \cos(2(kx - t\omega))$$

avec H la hauteur de la vague. Une onde de Stokes présente des crêtes plus pointues et des creux plus plats qu'une onde linéaire.

Ondes cnoïdales

Profil d'une onde cnoïdale pour différentes valeurs du paramètre elliptique m : $m = 0,05$ (courbe continue), $m = 0,5$ (courbe pointillée), $m = 0,95$ (courbe tiretée)



Les *ondes cnoïdales* sont des solutions périodiques de l'équation de Korteweg-de-Vries :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \sqrt{gh} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{3}{2} \sqrt{\frac{g}{h}} \eta \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{1}{6} h^3 \sqrt{gh} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0$$

Elles sont de la forme

$$\eta(x, t) = \eta_2 + H \operatorname{cn} \left(\frac{x - ct}{\Delta} \right)$$

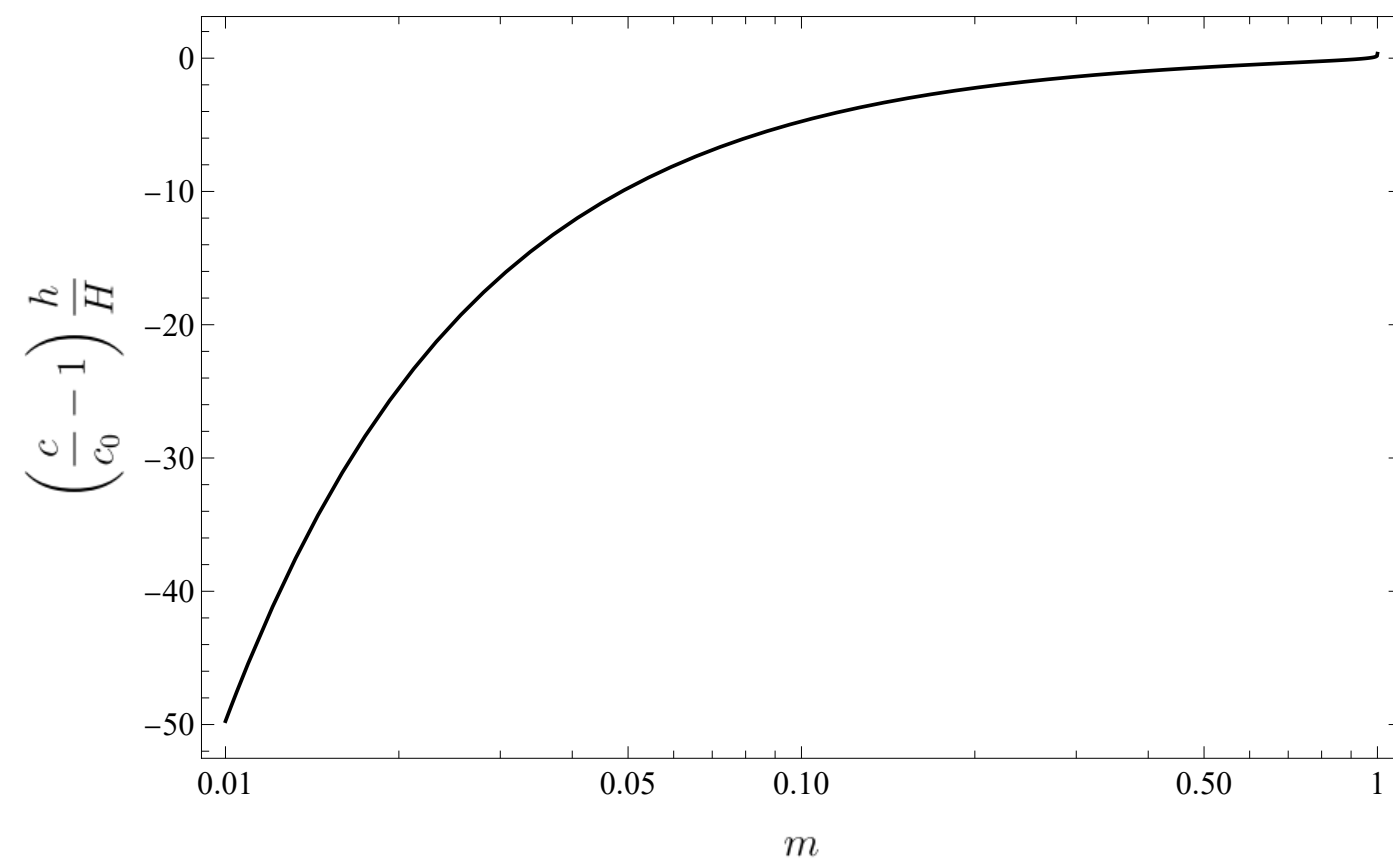
où η_2 est l'altitude (relative) des creux

$$\eta_2(m) = \frac{H}{m} \left(1 - m - \frac{E(m)}{K(m)} \right) \text{ et } \Delta = \frac{\lambda}{2K(m)} = h \sqrt{\frac{4mh}{3H}}$$

avec H la hauteur de la vague, m un paramètre dit paramètre elliptique, $K(m)$ l'intégrale elliptique complète du premier type, cn la fonction elliptique cn de Jacobi et $E(m)$ l'intégrale elliptique complète du second type.

Ondes cnoïdales (2)

célérité relative d'une onde cnoïdale en fonction de m



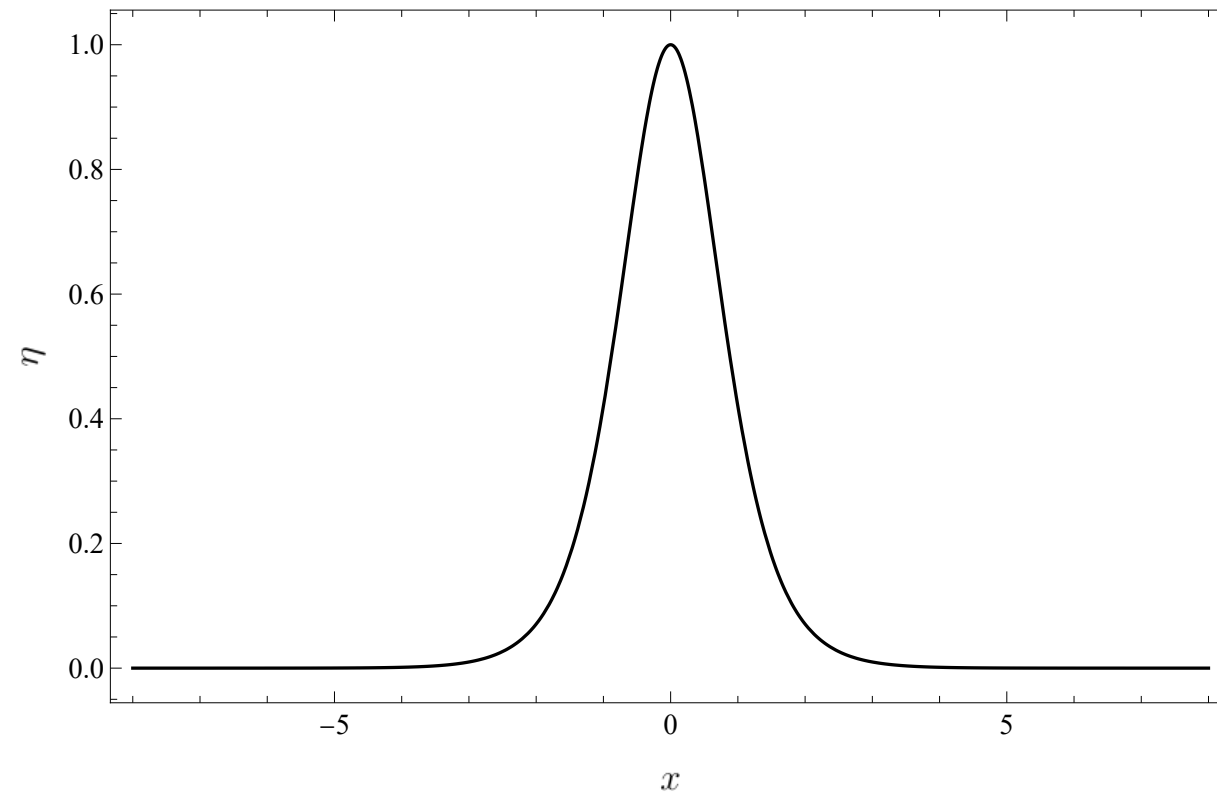
Les longueur d'onde λ et célérité c sont données par :

$$\lambda = h \sqrt{\frac{16mh}{3H}} K(m) \text{ et } c = \sqrt{gh} \left[1 + \frac{H}{mh} \left(1 - \frac{1}{2}m - \frac{3E(m)}{2K(m)} \right) \right]$$

Comportement asymptotique : pour $m \rightarrow 1$ (soliton), on a

$$\left(\frac{c}{c_0} - 1 \right) \frac{h}{H} \rightarrow \frac{1}{2}$$

Profil pour $H = 1$



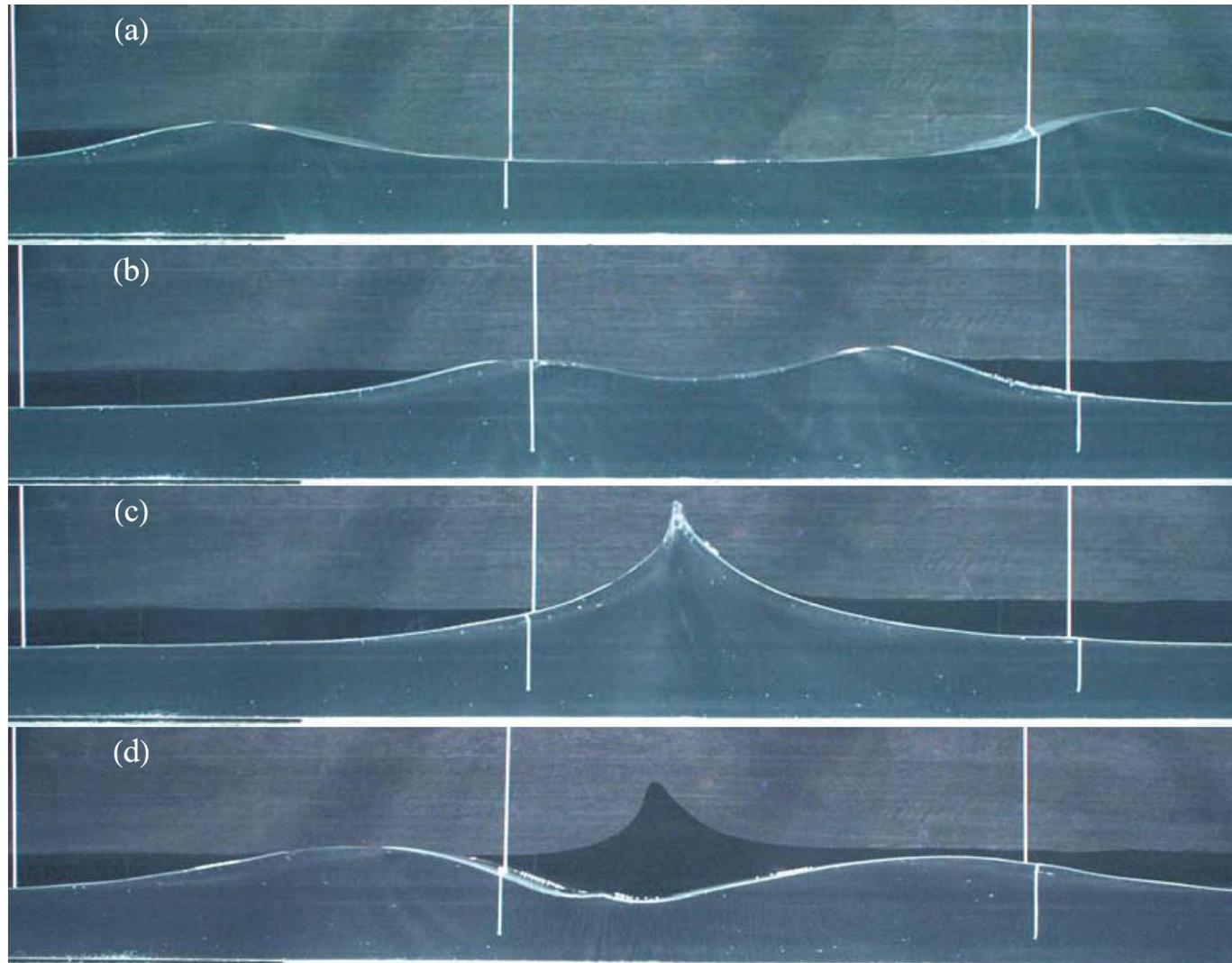
C'est un cas particulier d'onde cnoïdale $m \rightarrow 1$ (longueur d'onde infiniment grande). Sa vitesse est obtenue à partir de l'équation des ondes cnoïdales :

$$c^2 = c_0^2 \left(1 + \frac{1H}{2h} \right)^2 \approx g(h + H).$$

C'est donc une vitesse peu différente de la vitesse en eau peu profonde. Le profil d'un soliton est

$$\eta(x, t) = H \operatorname{sech}^2(\beta(x - ct)),$$

avec $\beta^{-2} = 4h^2(h + H)/3a \approx 4h^3/(3a)$ et sech la sécante hyperbolique ($\operatorname{sech} = 1/\cosh$).



Contrairement aux autres ondes non linéaires qui se dispersent et s'amortissent, elle garde une certaine individualité. D'où son nom de *soliton*.

Le profil d'un soliton est

$$\eta(x, t) = H \operatorname{sech}^2(\beta(x - ct)),$$

avec $\beta^{-2} = 4h^2(h + H)/3a \approx 4h^3/(3a)$ et sech la sécante hyperbolique ($\operatorname{sech} = 1/\cosh$).

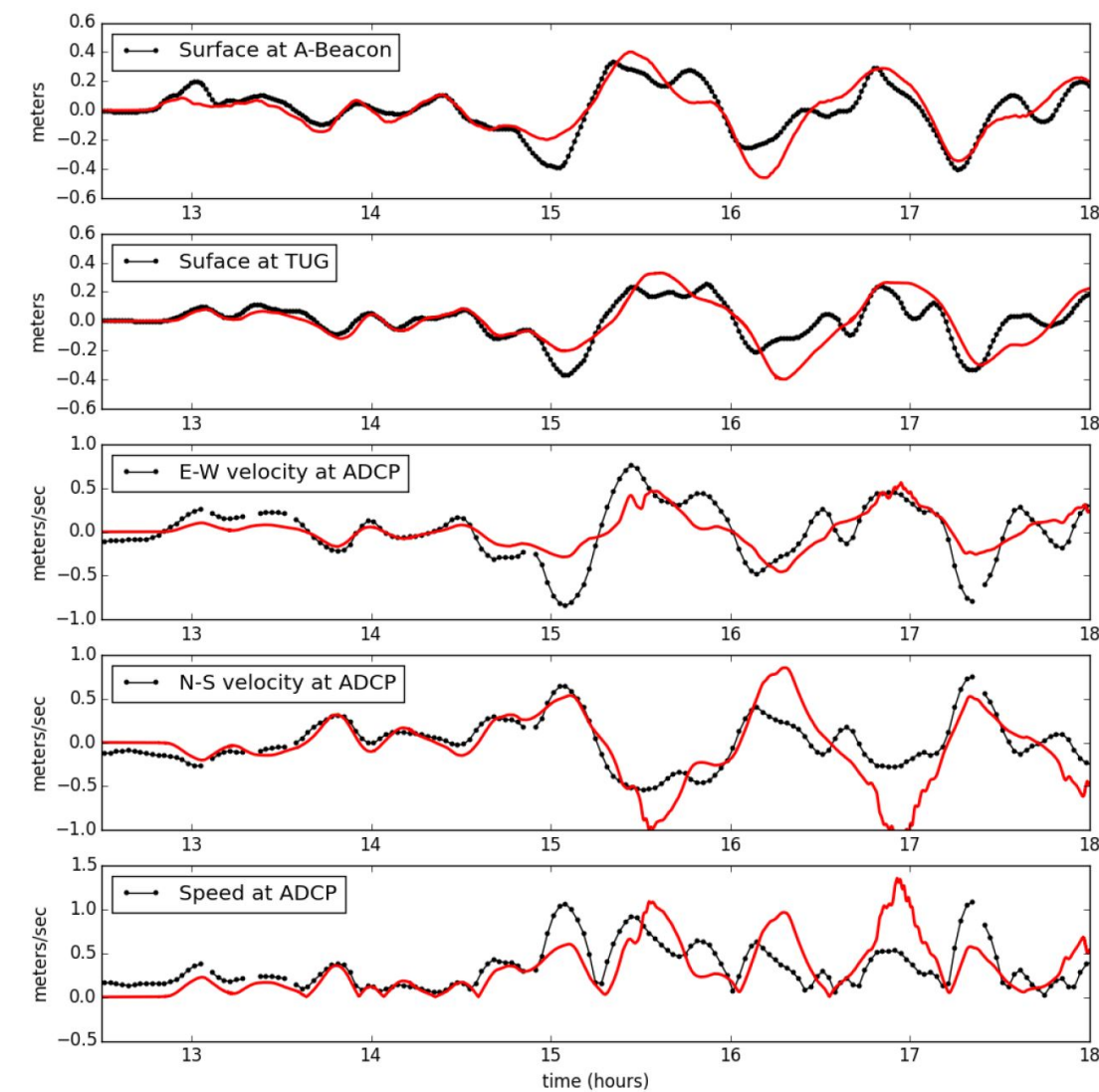
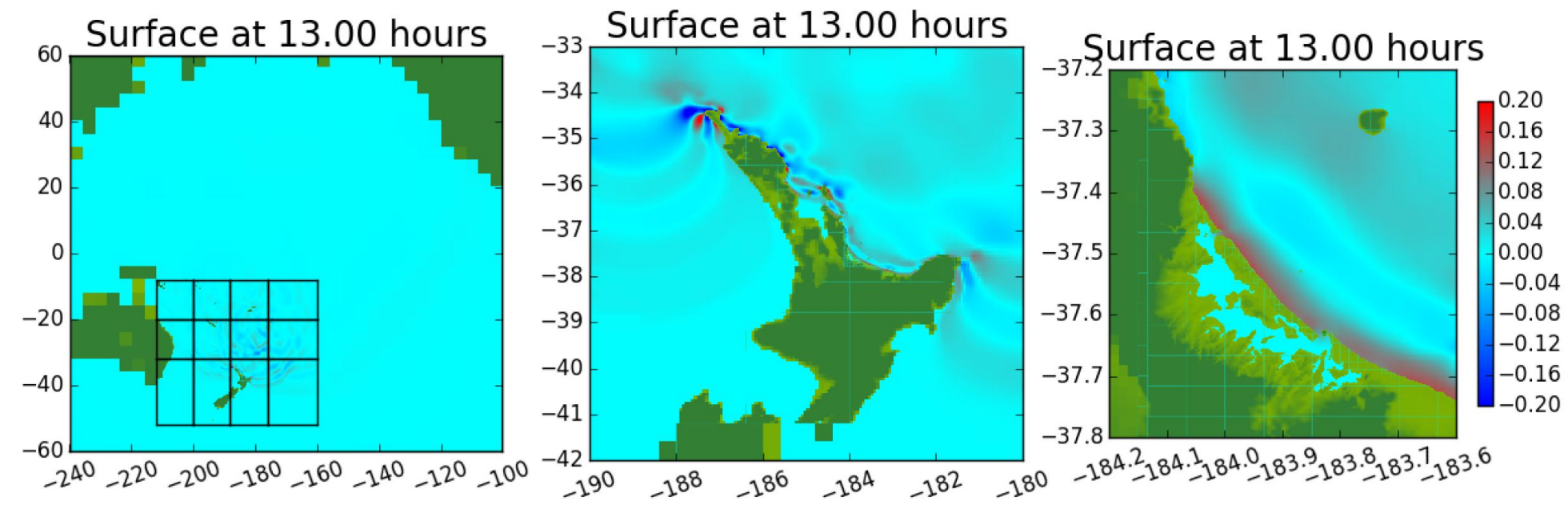
Propriétés remarquables :

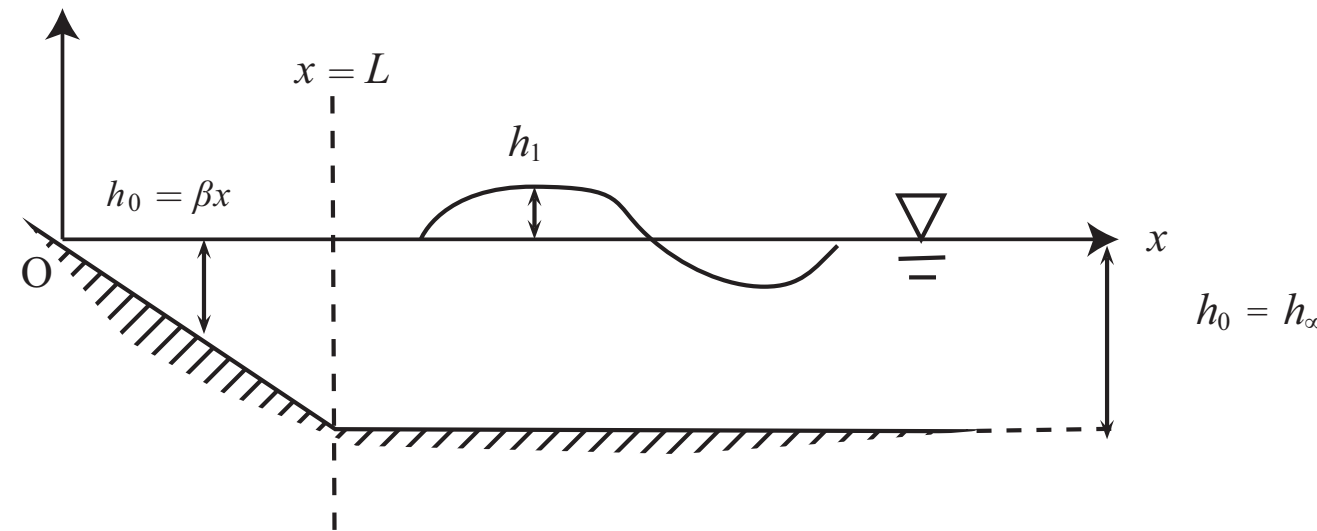
- l'onde n'est pas périodique (période de retour infiniment longue)
- il n'y a pas de creux ($\eta_2 = 0$)
- le profil est constant au cours du temps (pas de dispersion)

Tsunamis



Exemple de simulation par D. L. George (GeoClaw) : séisme de Tohoku (2011) \rightsquigarrow effet à Tauranga (NZ)





Considérons le cas où le fond marin est constituée d'un haut fond et d'une plage faiblement inclinée

$$h_0(x) = \begin{cases} \beta x & \text{pour } 0 \leq x \leq L \\ h_\infty & \text{pour } x \geq L \end{cases}$$

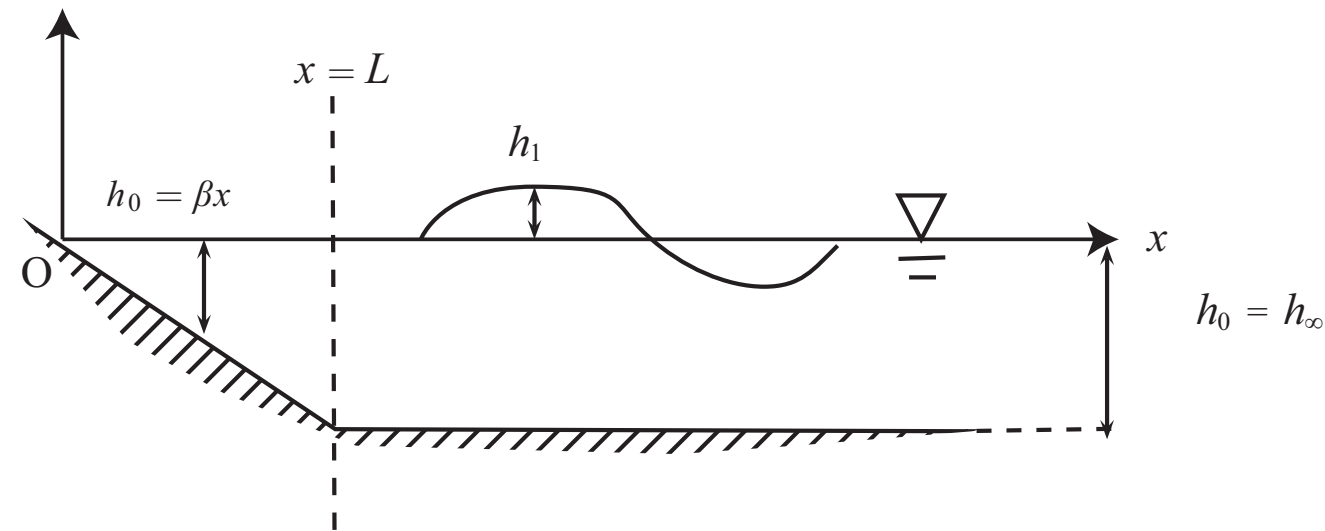
On suppose que $h_\infty \ll L$ de telle sorte que β soit petit.

Les équations de Saint-Venant s'écrivent pour un écoulement non frottant le long d'un fond horizontal

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h \bar{u}}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} &= -g \frac{\partial h}{\partial x} \end{aligned}$$

avec $\bar{u}(x, t)$ la vitesse moyenne de l'eau, $h(x, t)$ la profondeur d'eau, g la gravité.

Modèle simplifié de tsunami (2)



On part d'un état à l'équilibre ou $h = h_0(x)$ et $u = u_0(x) = 0$. L'eau initialement au repos est perturbée par une secousse en haute mer. Il se produit un train d'ondes dans l'océan ($x \rightarrow \infty$).

On cherche la solution sous la forme d'un développement asymptotique

$$h(x, t) = h_0(x) + \beta h_1(x, t) + \dots$$

$$u(x, t) = u_0(x) + \beta u_1(x, t) + \dots$$

Les équations de Saint-Venant à l'ordre β^0 s'écrivent donc

$$\frac{\partial h_0}{\partial t} + \frac{\partial h_0 \bar{u}_0}{\partial x} = 0$$
$$0 = -g \frac{\partial h_0}{\partial x}$$

qui sont trivialement vérifiées.

À l'ordre β^1 , ces équations deviennent

$$\frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{\partial h_0 \bar{u}_1}{\partial x} + \frac{\partial h_1 \bar{u}_0}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial t} = -g \frac{\partial h_1}{\partial x}$$

Les équations peuvent se combiner pour donner une seule équation régissant h_1

$$\frac{\partial^2 h_1}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(g h_0 \frac{\partial h_1}{\partial x} \right),$$

où l'on reconnaît les équations des ondes dans le cas où h_0 est constant (indépendant de x), avec ici la célérité des ondes égale à $c = \sqrt{g h_0}$.

Modèle de tsunami simplifié (4)



Pour le fond en pente, l'équation devient

$$\frac{\partial^2 h_1}{\partial t^2} = g\beta x \frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2} + g\beta \frac{\partial h_1}{\partial x},$$

sur le domaine $0 \leq x \leq L$. Pour la haute mer ($x > L$), la hauteur d'eau initiale est constante et l'équation à résoudre est l'équation des ondes linéaires

$$\frac{\partial^2 h_1}{\partial t^2} = gh_\infty \frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2},$$

dont la solution est de la forme $h_1(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \psi)$, avec A et ψ deux constantes, $c = \omega/k = \sqrt{gh_\infty}$ la célérité de l'onde, k le nombre d'onde. Les deux solutions doivent se raccorder en $x = L$ et avoir la valeur :

$$h_1(L, t) = A \cos(\omega t + \phi),$$

avec $\phi = \psi - kL$.

Modèle de tsunami simplifié (5)



Pour résoudre ce qui se passe à l'approche de la côte ($0 \leq x \leq L$), on recherche une solution avec des variables séparables

$$h_1(x, t) = \cos(\omega t + \phi)H(x).$$

L'équation différentielle régissant H est trouvée être

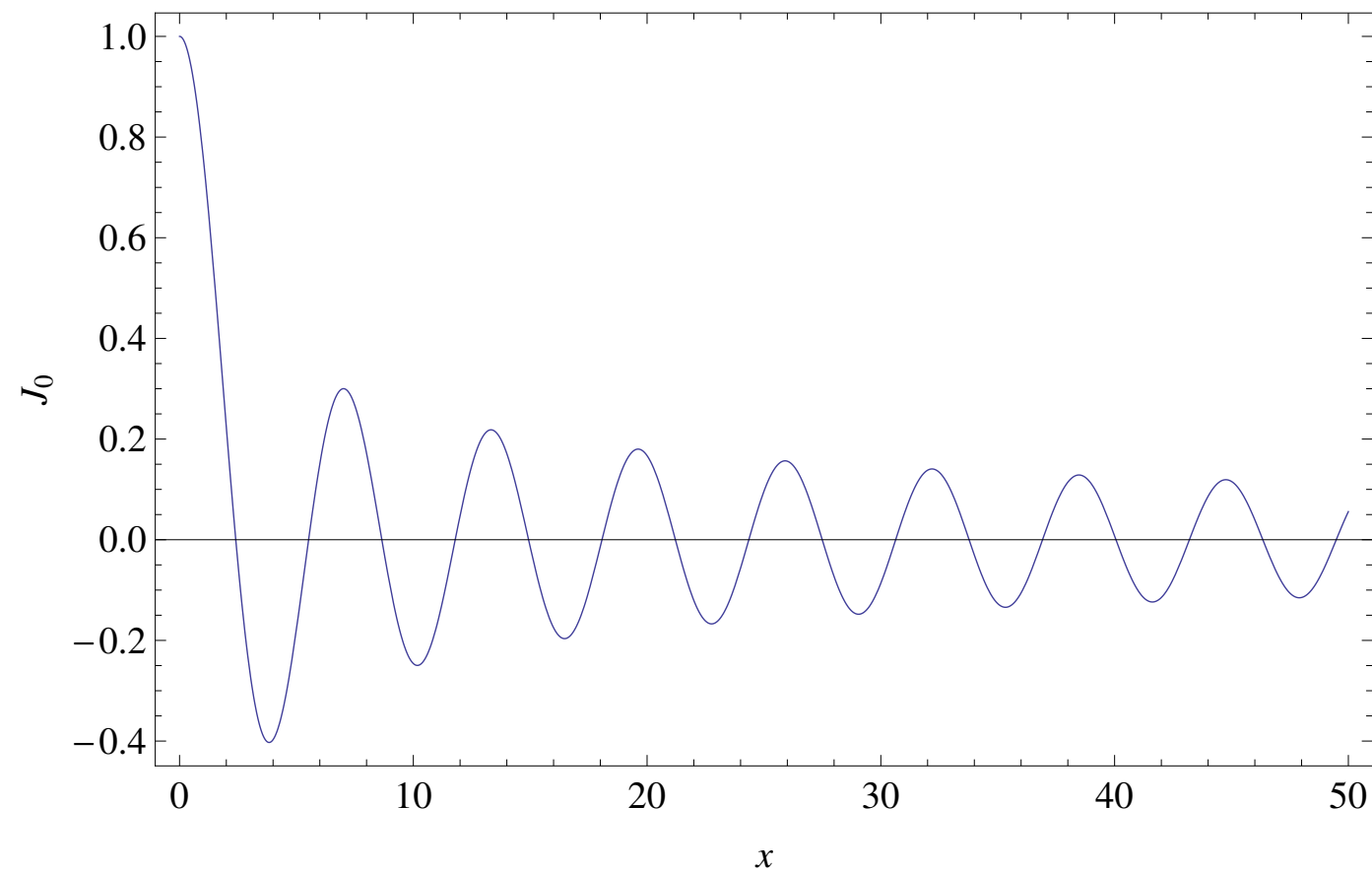
$$x \frac{d^2 H}{dx^2} + \frac{dH}{dx} + \frac{\omega^2}{g\beta} = 0,$$

avec $H(L) = A$ comme condition à la limite. Cette équation peut être résolue en faisant le

changement de variable : $x = 2\alpha s^2$ avec $\alpha = \sqrt{g\beta/(8\omega^2)}$ de telle sorte que

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dx} &= \frac{1}{4\alpha s} \frac{dH}{ds}, \\ \frac{d^2 H}{dx^2} &= \frac{1}{16\alpha^2 s^2} \frac{d^2 H}{ds^2} - \frac{1}{16\alpha^2 s^3} \frac{dH}{ds}. \end{aligned}$$

Modèle simplifié de tsunami (6)



C'est une équation de Bessel d'ordre 0 de la forme $y'' + y'/x + y = 0$.

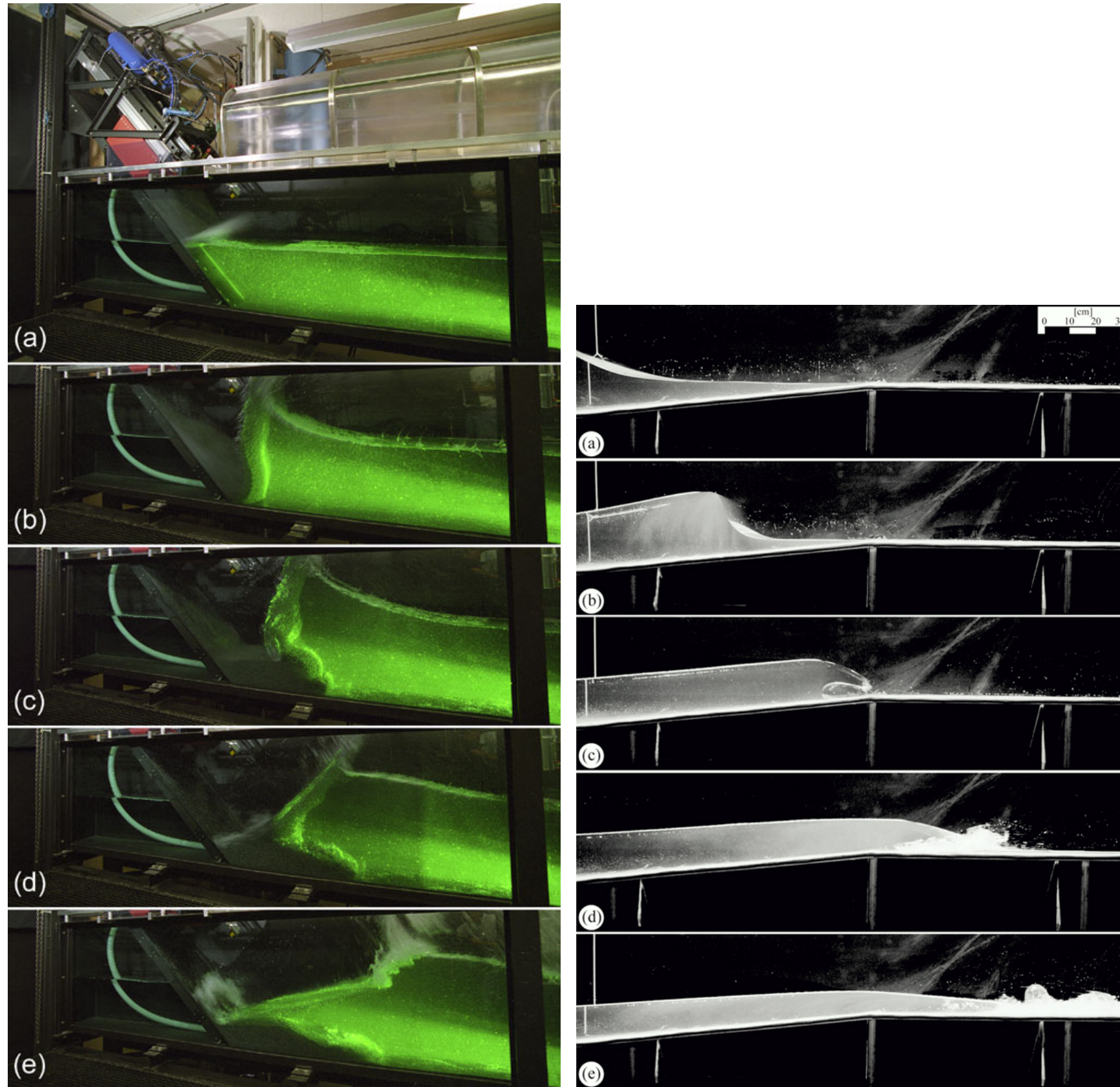
Les solutions sont de la forme $y = aJ_0(x) + bY_0(x)$ avec a et b deux constantes d'intégration et J_0 la fonction de Bessel d'ordre 0 du premier type, Y_0 la fonction de Bessel d'ordre 0 du second type qui n'est pas bornée en $x = 0$, donc $b = 0$.

La solution s'écrit donc $H(s) = aJ_0(s)$, ce qui donne compte tenu de la condition aux limites

$$H(x) = A \frac{J_0\left(\frac{2\omega}{\sqrt{g\beta}}\sqrt{x}\right)}{J_0\left(\frac{2\omega}{\sqrt{g\beta}}\sqrt{L}\right)}$$

Vagues d'impulsion



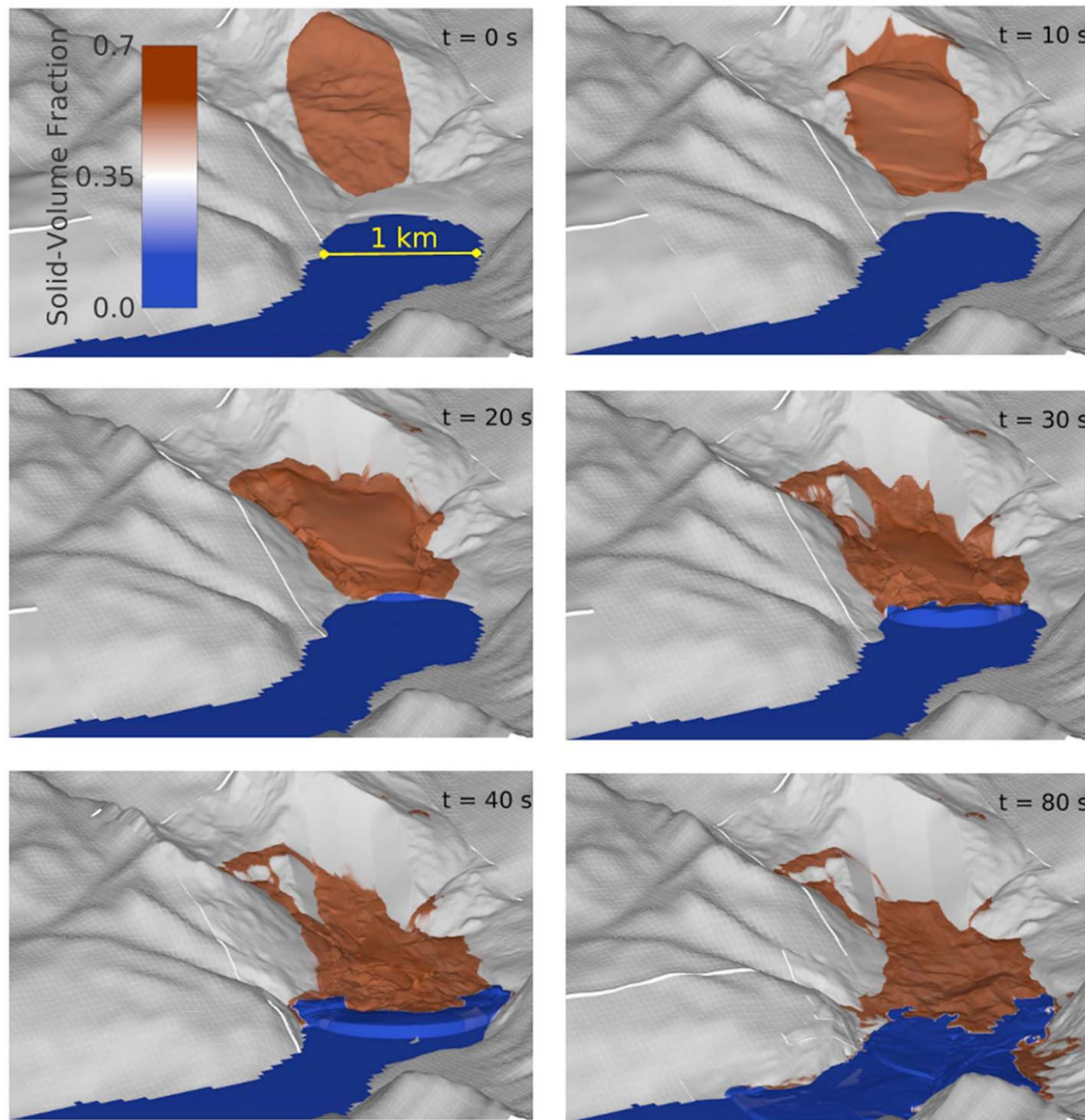


Trois problèmes :

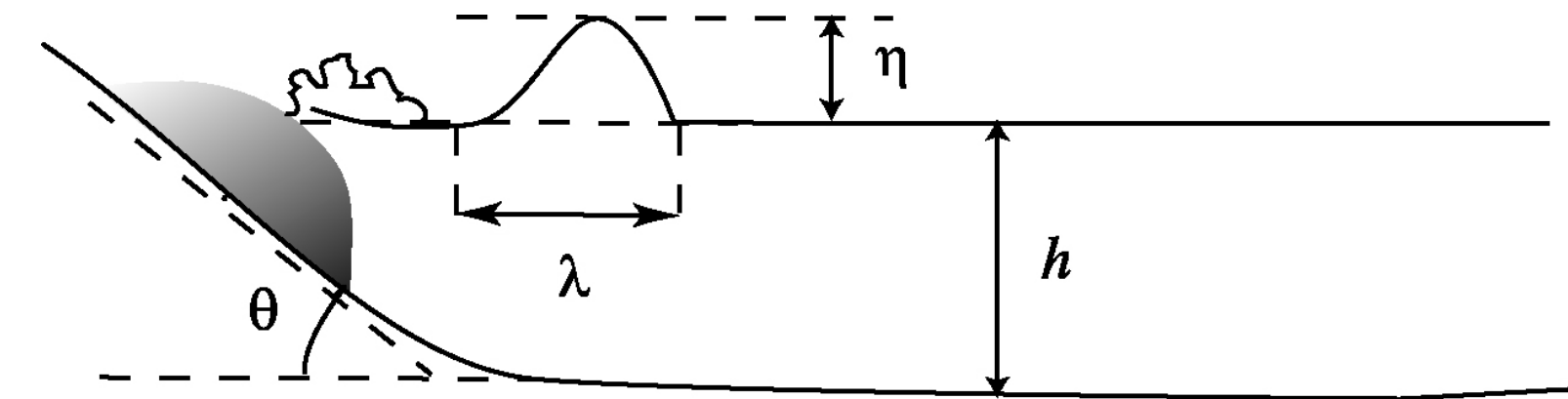
- formation de la vague lors de l'impact
- propagation
- run-up et impact sur la berge

Modélisation numérique

George et al., New methodology for computing tsunami generation by subaerial landslides : application to the 2015 Tyndall Glacier Landslide, Alaska, *Geophys. Res. Lett.*, 44, 2017. (cliquer pour l'animation)



Simulation de l'effondrement du glacier Tyndall dans le fjord Taan (Alaska) à l'aide de ClawPack/GeoClaw (David George, USGS). Résolution numérique des équations de Saint-Venant avec un schéma volume-fini adaptatif.



Équations de Saint-Venant

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - g, \end{aligned}$$

avec $h(x, t)$ la hauteur d'eau totale ($h = h_0 + \eta$), (u, v) les composantes de la vitesse dans un repère cartésien (x, y) rattaché à la retenue (x : horizontale, y : verticale), p la pression.

Similitude du problème :

$$\eta = \eta^* f(V_l^*, t^*, Fr \sin \theta),$$

avec

$$\eta^* = \frac{2V_l}{t_s^* \sqrt{gh_0}}, \quad V_l^* = \frac{V_l}{h_0^2}, \quad t_s^* = t_s \sqrt{\frac{g}{h_0}}, \quad \text{et } Fr = \frac{u_0}{\sqrt{gh_0}},$$

Résultats pour des blocs solides

Walder et al., Tsunamis generated by subaerial mass flows, *Journal of Geophysical Research*, 108, B2563, 2003.

Amplitude de l'onde en fonction de t_s^* et V_l^*

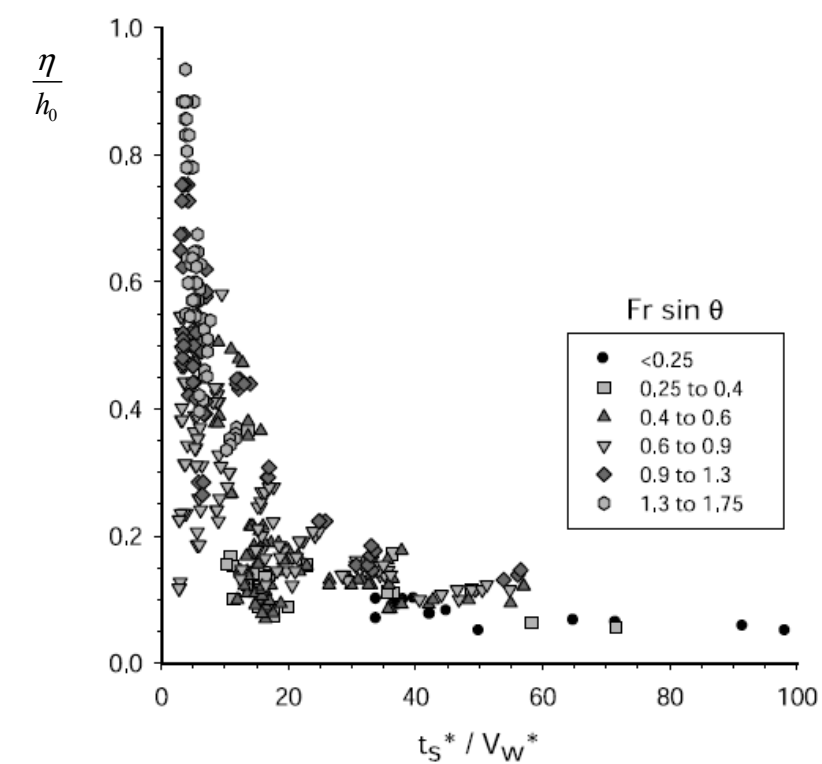
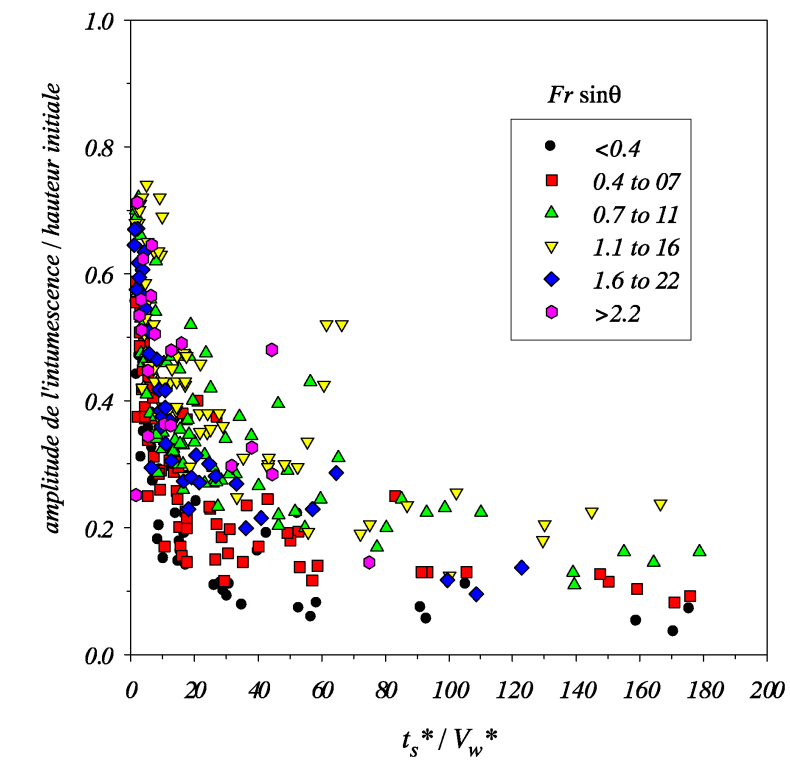
$$\frac{\eta}{h_0} = 1,32 \left(\frac{t_s^*}{V_l^*} \right)^{-0,68}$$

ou bien en fonction du nombre de Froude

$$\frac{\eta}{h_0} = AV_l^{*m} (Fr \sin \theta)^n,$$

avec $A \sim 0,4$ (0,35 – 0,5), $n \sim 0,35$ (0,25 – 0,5), et $m \sim 0,35$ (0,3 – 0,4).

Longueur d'onde : $\lambda \approx 0,27t_s \sqrt{gh}$.

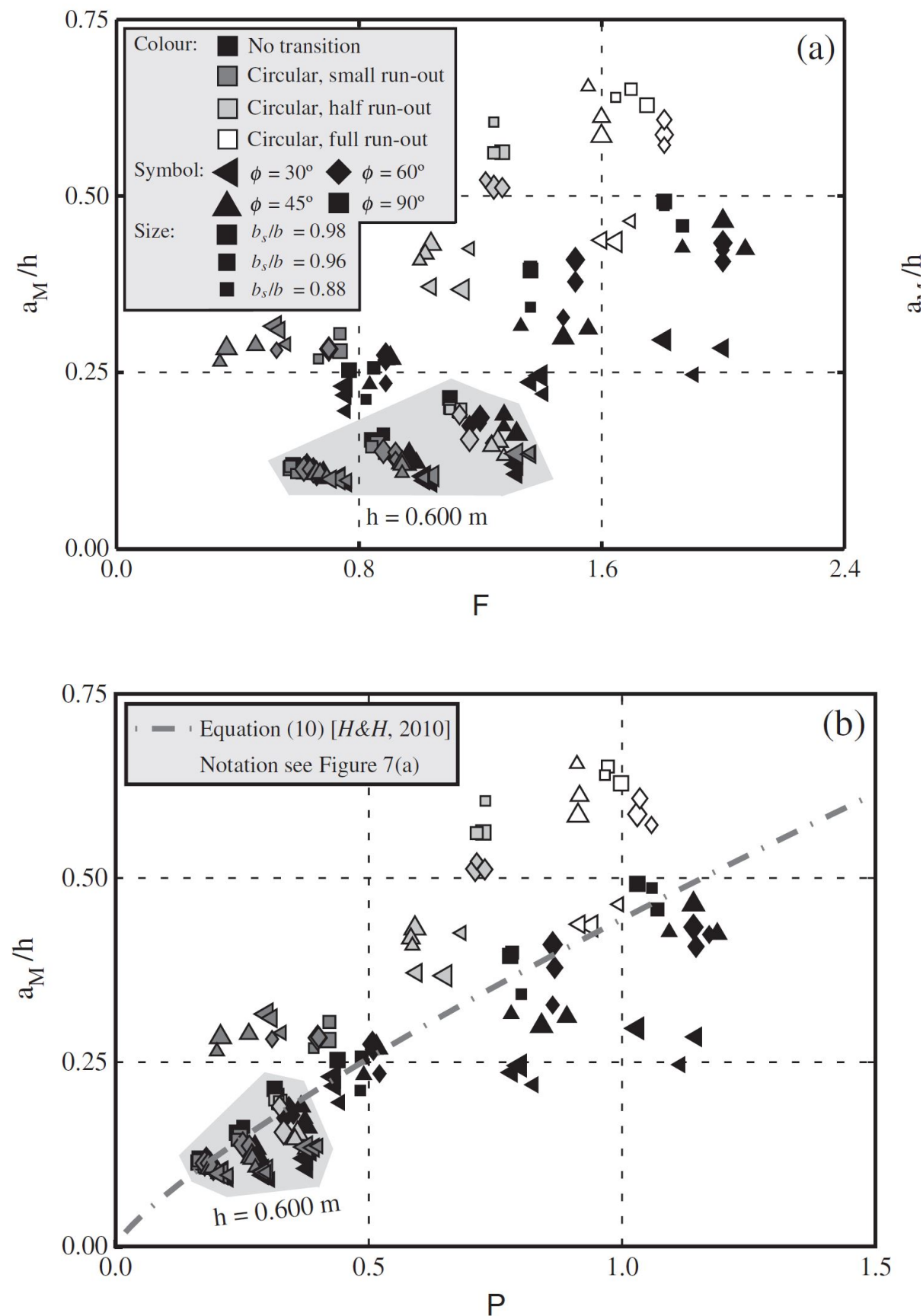


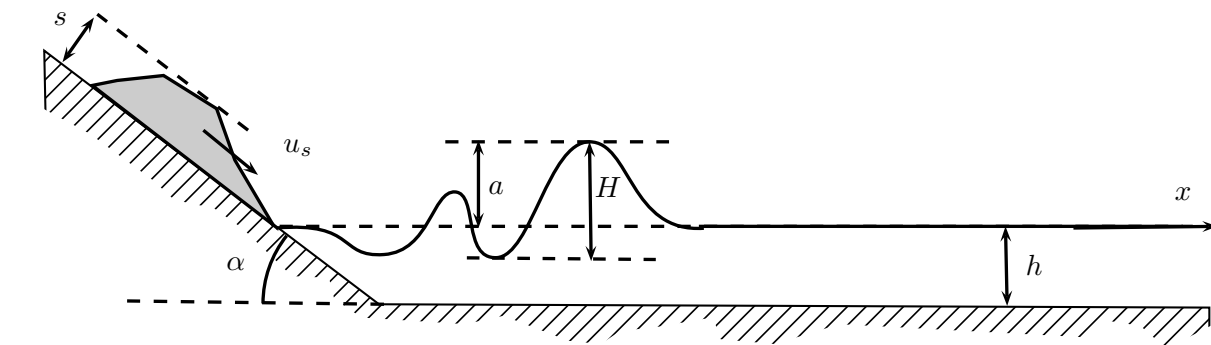
Heller, V., W.H. Hager, and H.-E. Minor, *Rutscherzeugte Impulswellen in Stauseen – Grundlagen und Berechnung*, Versuchsanstalt für Wasserbau, Hydrologie und Glaziologie VAW, ETH Zürich – Bundesamt für Energie, Bern, 2008.

Paramètre d'impulsion comme combinaison de nombres sans dimension

$$P = Fr \left(\frac{s}{h} \right)^{1/2} \left(\frac{\rho_s V_s}{\rho_f h^2} \right)^{1/4} \cos^{1/2} \left(\frac{6}{7} \alpha \right),$$

avec s l'épaisseur de l'écoulement, h la hauteur d'eau, ρ_s la masse volumique solide, ρ_f la masse volumique du fluide (eau), V_s le volume de l'écoulement granulaire par unité de largeur (de canal), $Fr = u_s / \sqrt{gh}$ le nombre de Froude avec u_s la vitesse de l'écoulement solide à l'entrée dans la retenue





- Amplitude maximale (incertitude $\pm 30\%$) selon Heller (2008)

$$a_{max} = \frac{4}{9} h P^{4/5},$$

Ce maximum est atteint en $x_{max} = \frac{11}{2} h P^{1/2}$ (incertitude $\pm 50\%$). Huber (1997) propose

$$a_{max}(x) = 0,88 h \sin \alpha \left(\frac{\rho_s}{\rho_f} \right)^{1/4} \left(\frac{V_s}{h^2} \right)^{1/2} \left(\frac{h}{x} \right)^{1/4}.$$

- Hauteur maximale

$$H_{max}(x) = \frac{5}{4} a_{max} = \frac{5}{9} h P^{4/5}$$

- Volume maximal (incertitude $\pm 50\%$)

$$V_{max} = h^2 P^{6/5}$$

- l'amplitude des vagues décroît en fonction de x

$$a(x) = \frac{3}{5} h P^{4/5} \left(\frac{x}{h} \right)^{-4/15}$$

Cas des écoulements à faible densité

Zitti et al., Impulse waves generated by snow avalanches : Momentum and energy transfer to the water body, *J. Geophys. Res. : Earth Surface*, **121**, 2399-2423, 2016.

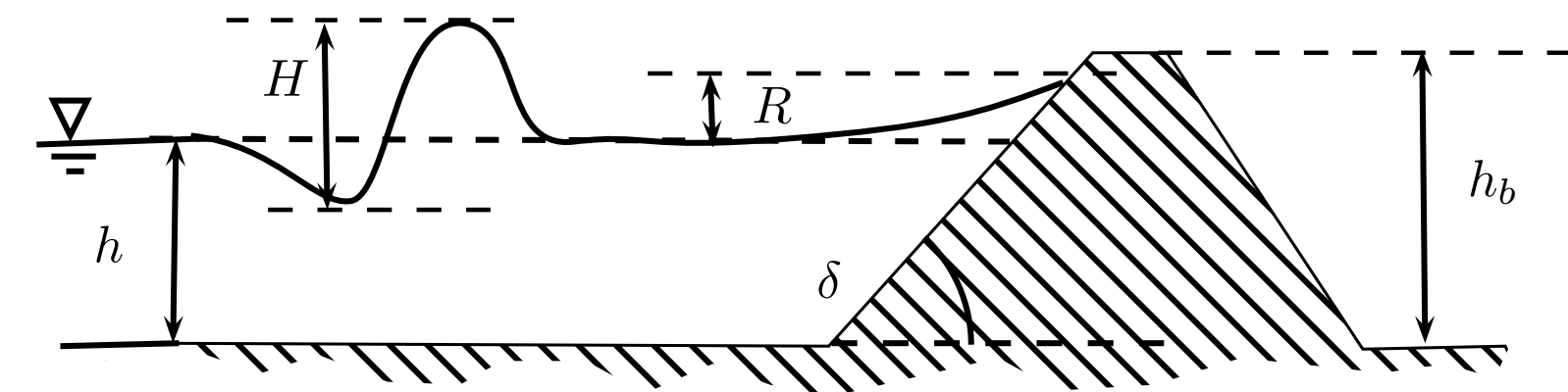


Bornes inférieure et supérieure d'amplitude et de hauteur des vagues d'après Zitti (2016)

	amplitude A/h	hauteur H/h
borne inférieure	$A' = 0,143P (R^2 = 0,68)$	$H' = 0,19P (R^2 = 0,52)$
borne supérieure	$A' = 0,427P^{4/5} (R^2 = 0,81)$	$H' = 0,48P^{4/5} (R^2 = 0,48)$

Vischer, D.L., and W.H. Hager, *Dam Hydraulics*, John Wiley & Sons, Chichester, 1998.

Evers et al., Spatial impulse wave generation and propagation, *J. Waterway, Port, Coastal, Ocean Eng.*, **145**, 04019011, 2019.



Hauteur de remontée (*run-up*) R d'une onde d'impulsion le long d'un obstacle selon Müller

$$R = 1,25h \left(\frac{\pi}{2\delta} \right)^{1/5} \left(\frac{H}{h} \right)^{4/5} \left(\frac{H}{\lambda} \right)^{-3/20}$$

avec δ l'angle du parement par rapport à l'horizontale, H la hauteur maximale de la vague, et λ la longueur d'onde.

Evers et al. proposent une formule différente (avec des écarts significatifs avec la formule de Müller) :

$$R = 2a \exp \left(0,4 \frac{a}{h} \right) \left(\frac{90}{\delta} \right)^{1/5}$$

avec δ l'angle du parement par rapport à l'horizontale exprimé en degré, a l'amplitude de la vague à l'approche de la digue/barrage, et h la hauteur d'eau au niveau de la digue.

Mascaret

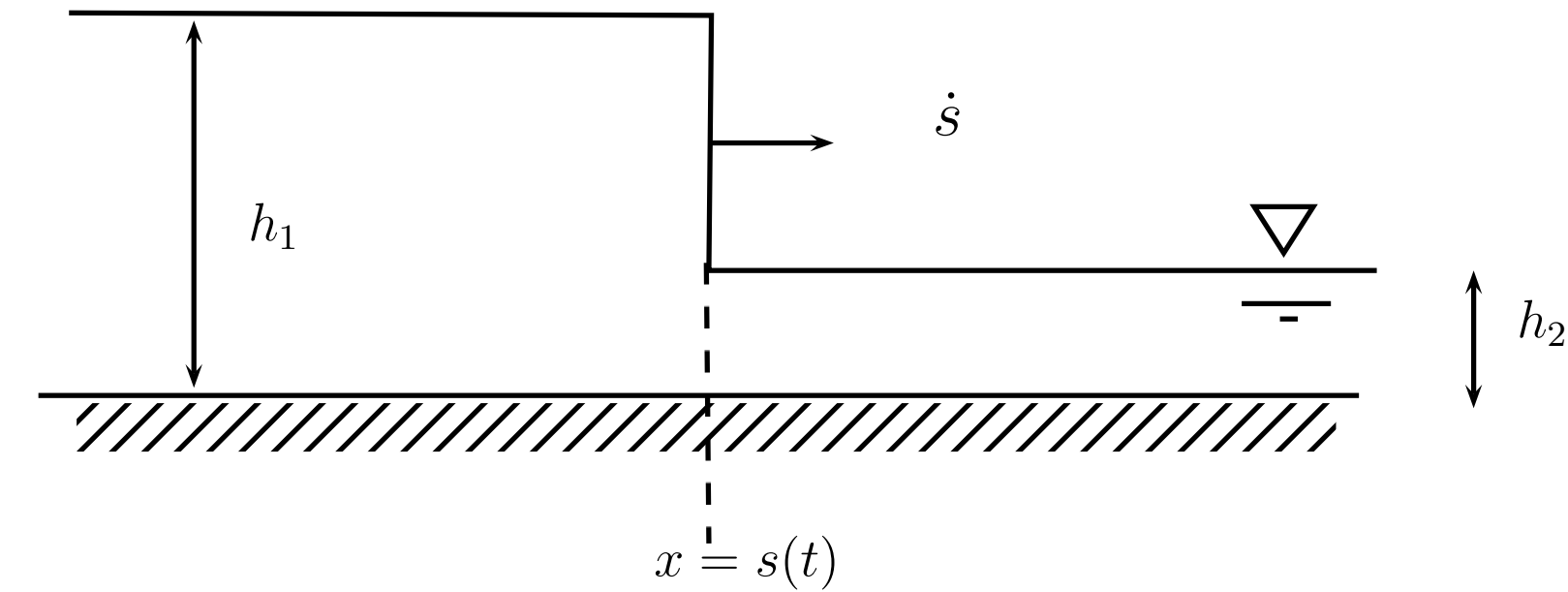


Zavragia (TI), juillet 1987



Le mascaret : onde avec un front raide qui se propage dans les cours d'eau. Causes :

- effet des marées qui modifient la condition aux limites aval de certaines fleuves
- onde de crue avec déferlement au niveau front
- déplacement de paroi mobile (p. ex. écluse)



Conditions de Rankine-Hugoniot pour les équations de Saint-Venant (voir chap. 1)

$$\begin{aligned}\dot{s}[[h]] &= [[uh]] \\ \dot{s}[[hu]] &= \left[\left[u^2h + \frac{1}{2}g \cos \theta h^2 \right] \right]\end{aligned}$$

où les crochets indiquent la variation brutale de part et d'autre de la discontinuité

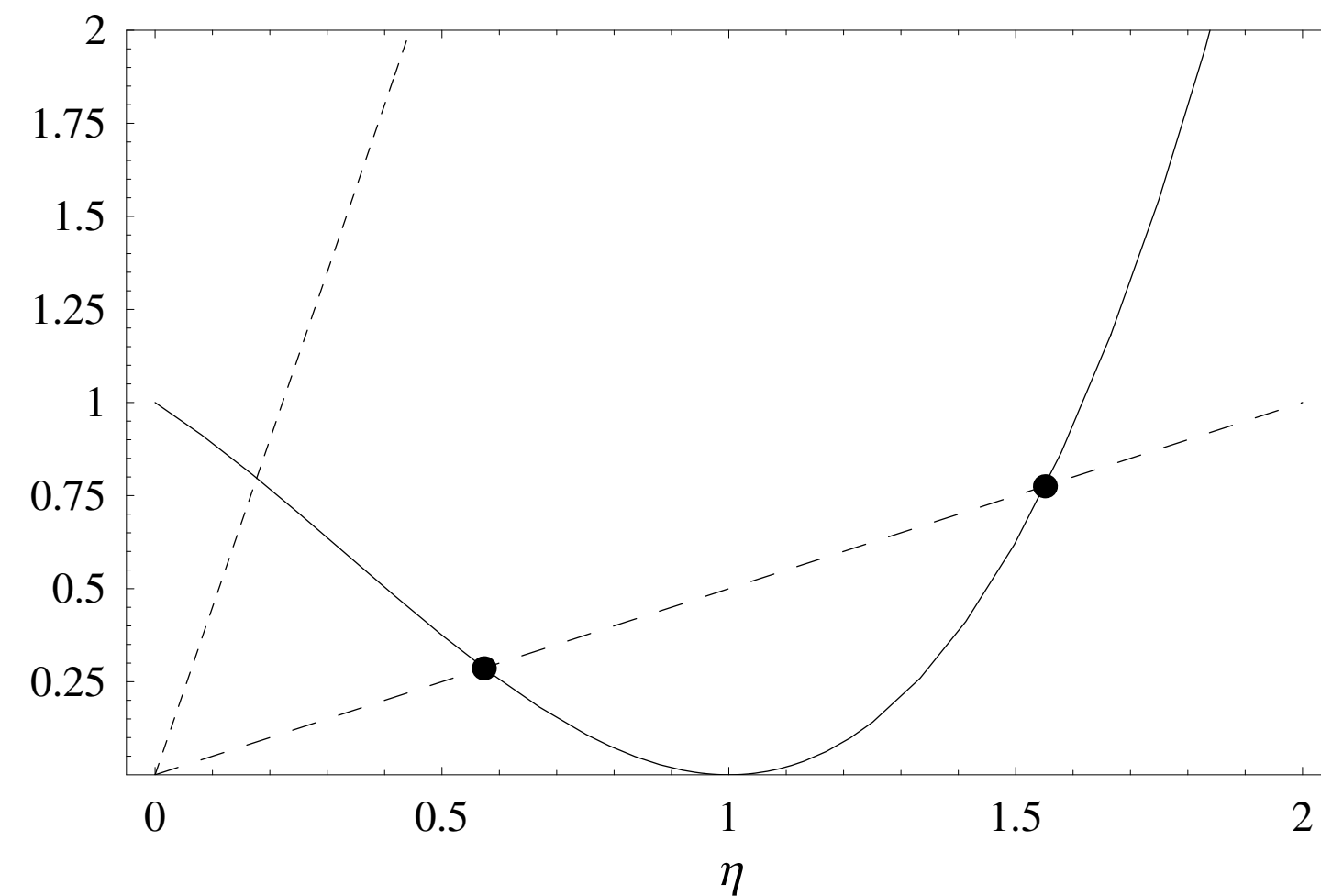
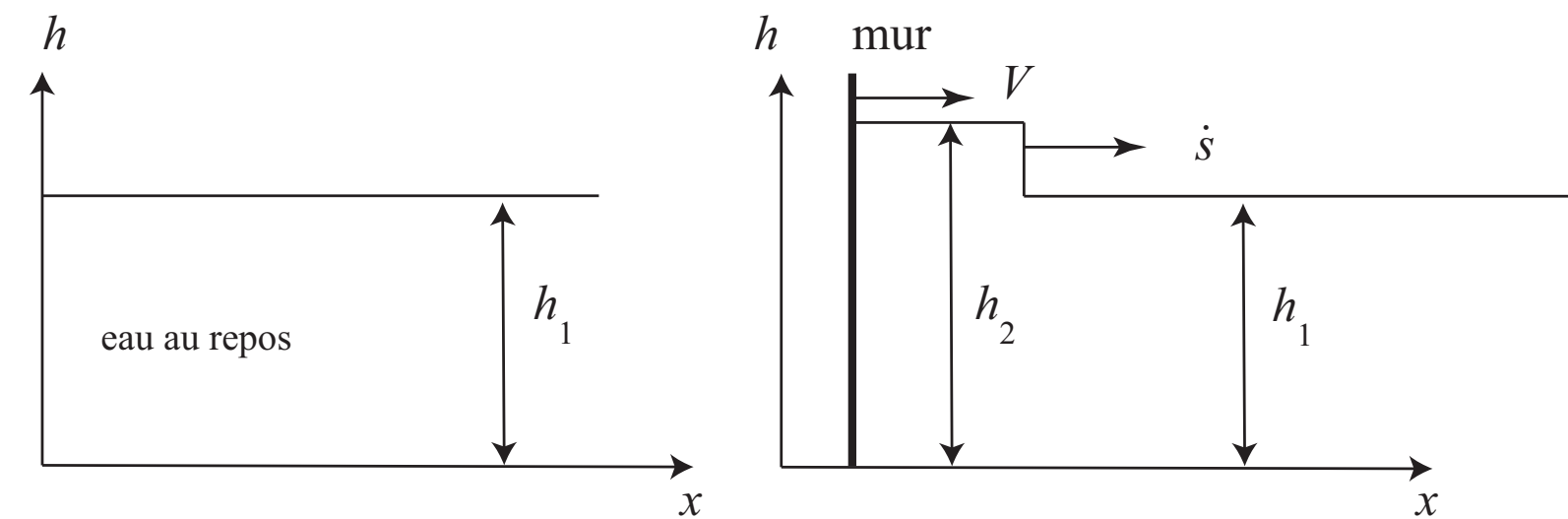
$$[[h]] = h_+ - h_-$$

avec

$$h_+ = \lim_{x \rightarrow s, x > s(t)} h(x, t) \text{ et } h_- = \lim_{x \rightarrow s, x < s(t)} h(x, t)$$

Mascaret : exemple

Mise en mouvement de translation d'une vanne à $t = 0$ dans un canal (eau au repos)



Conditions de Rankine-Hugoniot

$$\dot{s}(h_2 - h_1) = -Vh_1,$$

$$\dot{s}(-Vh_1) = gh_2^2/2 - (h_1V^2 + gh_1^2/2).$$

En éliminant \dot{s} , on tire la relation :

$$(1 - \eta)^2(1 + \eta) = 2Fr^2\eta,$$

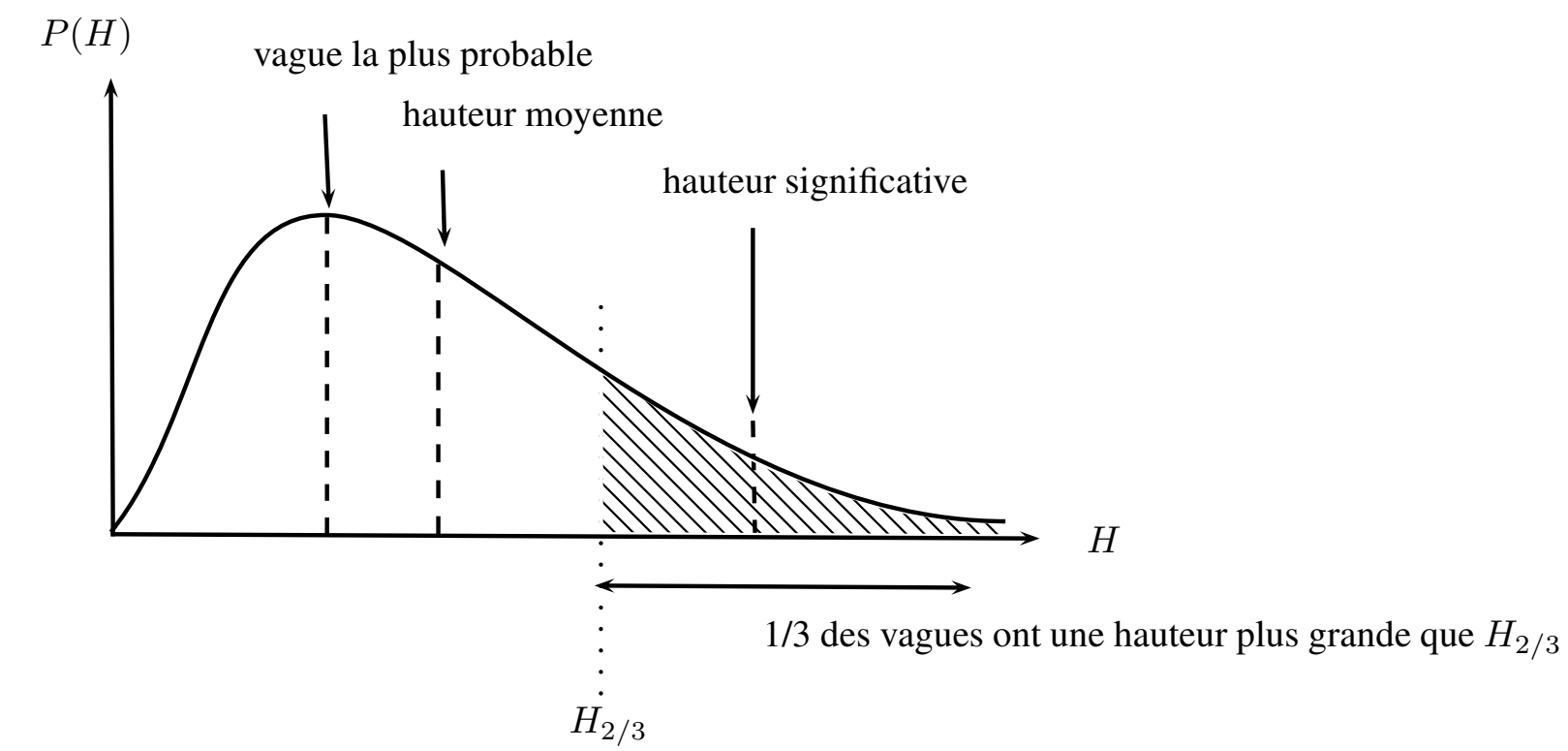
où $Fr = V/\sqrt{gh_2}$ est le nombre de Froude et $\eta = h_1/h_2$. Il y a deux solutions à cette équation mais une seule avec $\eta > 1$.

L'intersection des courbes $2Fr^2\eta$ et $(1 - \eta)^2(1 + \eta) = 2Fr^2\eta$ fournit la valeur η cherchée.

Remarque : si $Fr > 1$, alors $\eta < 1$, donc une vitesse $\dot{s} < 0$, ce qui n'a pas de sens. La solution est plus complexe : elle comprend une onde simple de détente précédée d'un mascaret.

Houle





Densité de probabilité f de la loi de Rayleigh de paramètre σ (le mode de f)

$$f(x; \sigma^2) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

Houle = vague d'amplitude variable (aléatoire)

Définition d'une hauteur caractéristique dite *significative*

- on détermine la probabilité d'observer une certaine hauteur de vague. Les hauteurs de vague sont souvent décrites à l'aide de la loi de probabilité de Rayleigh
- on considère la population de vague qui constitue le tiers supérieur
- la hauteur spécifique H_s est la moyenne de cette population.

Vitesse de frottement : $u_* = \sqrt{\tau/\rho}$ (contrainte τ exercée par le vent sur la surface d'eau)

On introduit de la façon suivante les hauteurs significatives, fetchs, et fréquence (des pics du spectre) sous forme adimensionnelle :

$$\hat{H} = \frac{gH}{u_*^2}, \hat{F} = \frac{gF}{u_*^2}, \hat{U} = \frac{U}{u_*}, \text{ et } \hat{f} = \frac{u_* f}{g}$$

Parmi les premières lois proposées, il y a le modèle SMB (Sverdrup, Munk and Bretschneider) calé sur des données de l'Atlantique nord (avant 1920) :

$$\hat{H}_s = 0,283 \tanh \left(0,0125 \hat{F} \right)$$

Par la suite, les lois d'échelle ont été recherchées sous la forme de produits de monômes :

$$\hat{H}_s = a \hat{F}^p \hat{U}^q, \text{ et } \hat{f}_p = b \hat{F}^r \hat{U}^s$$

avec a , b , p , q , r , et s des paramètres calés sur des mesures

Estimation de la hauteur des vagues (2)



La formule *Jonswap* (Acronyme pour JOint North Sea WAve Project) (1973) donne la hauteur significative des vagues à partir d'une analyse de tempêtes sur la mer du Nord :

$$\hat{H}_s = 1,6 \times 10^{-3} \hat{U} \sqrt{\hat{F}},$$

tandis que la fréquence du pic est donnée par

$$\hat{f}_p = \frac{3,5 \times 10^{-3}}{\hat{F}^{1/3} \hat{U}^{1/3}},$$

avec $\hat{U} = 1$ pour cette méthode (profil de vitesse plat). Problème principal : détermination de U

Estimation de la hauteur des vagues (3)



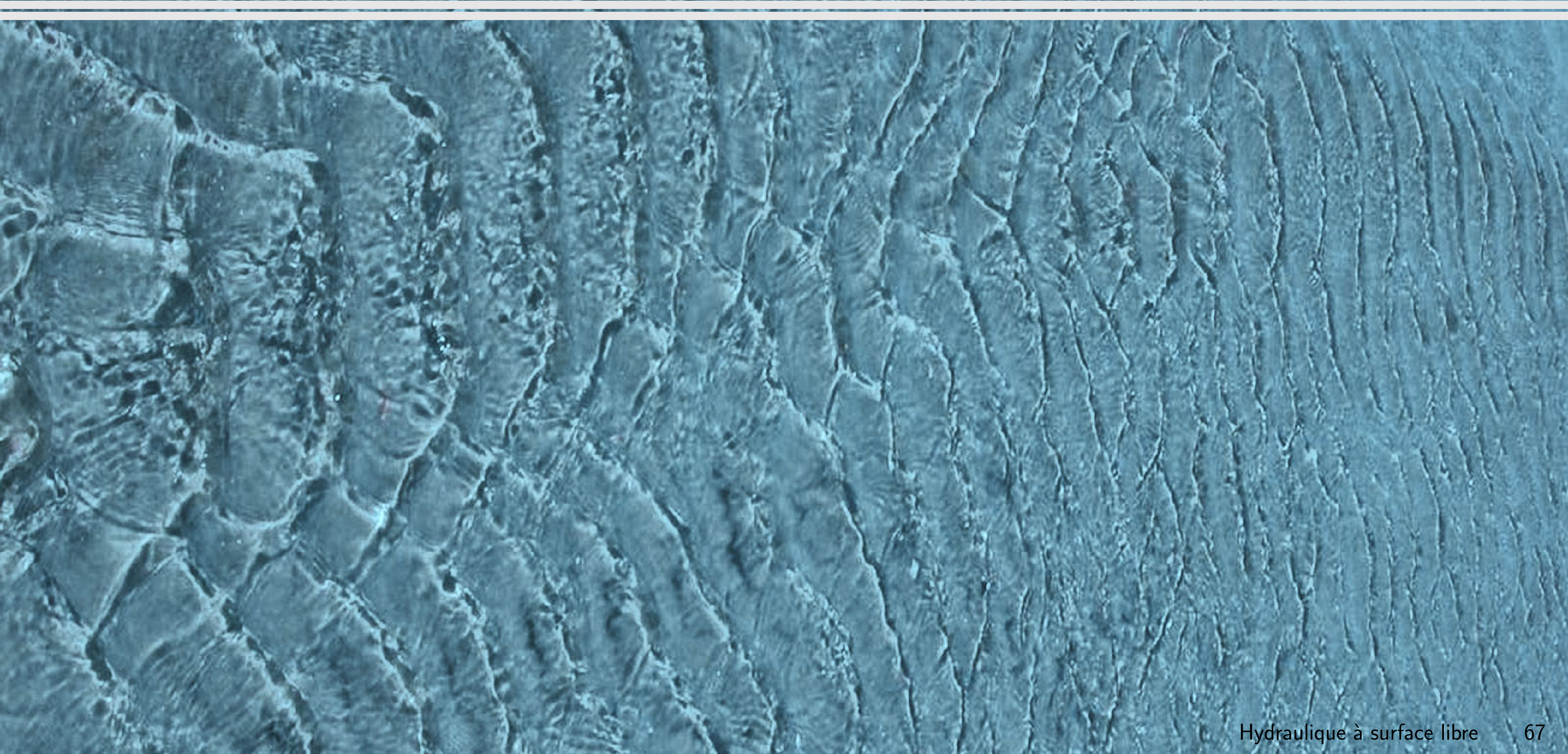
Détermination de la hauteur significative pour un vent U (en m/s, à 10 m du sol) et un fetch F (en m)

Auteur	H_s (m)	r_p
Jonswap (1973)	$H_s = 1,6 \times 10^{-3} g^{-0,5} F^{0,5} U$	–
Donelan (1982)	$H_s = 3,66 \times 10^{-3} g^{-0,62} U^{1,24} F^{0,38} \phi^{1,24}$	0,83
Walsh (1985)	$H_s = 1,7 \times 10^{-3} g^{-0,5} U F^{0,5} \phi^{1,63}$	0,85
Smith (1991) ^b	$H_s = 1,5 \times 10^{-3} g^{-0,5} F^{0,5} U \cos \phi$	0,87
Molitor (1935)	$F \leq 32$ km, $H_s = 0,76 - 4,62 \times 10^{-2} F^{0,25} + 5,3 \times 10^{-4} F^{0,5} U^{0,5}$	–
	$F > 32$ km, $H_s = 5,3 \times 10^{-4} F^{0,5} U^{0,5}$	–

Coefficient de corrélation r_p ; ϕ est l'angle entre la direction du vent et celle des vagues.

Formules calées sur des étendues d'eau $F > 2$ km.

Instabilités de la surface libre



Équations de Saint-Venant sous forme tensorielle

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U} + \mathbf{A} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{U} = \mathbf{S},$$

avec :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \bar{u} & h \\ g \cos \theta & \bar{u} \end{pmatrix}, \mathbf{U} = \begin{pmatrix} h \\ \bar{u} \end{pmatrix}, \text{ et } \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ g \sin \theta - \frac{\tau_p}{\rho h} \end{pmatrix}.$$

On considère un régime permanent uniforme et on va perturber cet état d'équilibre $\mathbf{U}_0 = (H, U)$

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_0 + \mathbf{U}',$$

avec le vecteur $\mathbf{U}' = (\eta, \kappa)$ le vecteur perturbation, κ et η la perturbation de la hauteur et celle de la vitesse



Équation linéarisée gouvernant les perturbations \mathbf{U}'

$$\frac{\partial \mathbf{U}'}{\partial t} + \mathbf{A}(\mathbf{U}_0) \cdot \frac{\partial \mathbf{U}'}{\partial x} = \mathbf{S}(\mathbf{U}').$$

On recherche la solution sous la forme

$$\eta = \text{Re}(\Delta e^{i(nx-ct)}), \quad \kappa = \text{Re}(X e^{i(nx-ct)}),$$

où Δ et X sont les amplitudes complexes respectivement de la hauteur et de la vitesse, n est le nombre d'onde (qui est un réel positif), et c une constante complexe qui reste à déterminer.

La partie réelle de c peut être interprétée comme la vitesse de propagation des perturbations tandis que sa partie imaginaire reflète le taux de croissance (ou de décroissance) de l'amplitude.

L'écoulement est supposé devenir instable dès que la partie imaginaire de c devient positive.

On obtient le système

$$\begin{bmatrix} nA_{11} - c & nA_{12} \\ nA_{21} - i\frac{\partial(\tau_p/\bar{\rho}H)}{\partial H} & nA_{22} - c - i\frac{\partial(\tau_p/\bar{\rho}H)}{\partial U} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \\ X \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

avec A_{ij} la composante (i,j) de la matrice \mathbf{A} . Ce système admet aucune solution triviale pourvu que son déterminant soit nul. L'équation de dispersion est obtenue en calculant le déterminant du système et en l'exprimant en fonction de c

$$c^2 - 2\alpha c - \beta = 0,$$

avec

$$\alpha = \alpha_r + i\alpha_i = n \frac{A_{22} + A_{11}}{2} - i \frac{1}{2} \frac{\partial(\tau_p/\bar{\rho}H)}{\partial U}$$

$$\beta = \beta_r + i\beta_i = n \left[n (A_{12}A_{21} - A_{22}A_{11}) + i \left(A_{11} \frac{\partial(\tau_p/\bar{\rho}H)}{\partial U} - A_{12} \frac{\partial(\tau_p/\bar{\rho}H)}{\partial H} \right) \right]$$

Nous cherchons maintenant une solution à l'équation

$$(c - \alpha)^2 = r e^{i\Theta}$$

La partie imaginaire de la solution peut être écrite

$$c = \alpha \pm \sqrt{r} e^{i\Theta/2} \Rightarrow c_i = \text{Im}(c) = \alpha_i \pm \sqrt{r} \sin \frac{\Theta}{2}$$

La plus grande partie imaginaire est

$$c_i = \alpha_i + \sqrt{r} \left| \sin \frac{\Theta}{2} \right|.$$

Question : quand est-ce que $c_i > 0$? En prenant la racine carrée de chaque des membres de cette équation, puis considérant que $2\alpha_i^2 + r \cos \Theta$ est toujours positive, on obtient après réarrangement

$$r > 2\alpha_i^2 + r \cos \Theta \Leftrightarrow \beta_i^2 > 4\alpha_i(\beta_r \alpha_i - \beta_i \alpha_r)$$

Le critère d'instabilité est le suivant :

$$\left(H \frac{\partial \tau_p}{\partial H} - \tau_p \right) \left(H \frac{\partial \tau_p}{\partial H} - \tau_p \right) > gH \cos \theta \left(\frac{\partial \tau_p}{\partial U} \right)^2$$

Interprétation : la source d'énergie pour que l'instabilité se développe est fournie par le travail de la gravité ; l'écoulement est linéairement instable si la puissance des forces gravitaires excède l'énergie dissipée aux frontières par τ_p .

En prenant par exemple une contrainte de frottement à la Chézy ($\tau_p = \rho g \bar{u}^2 / C^2$), on trouve que le critère d'instabilité est

$$Fr > 2$$

avec $Fr = \bar{u} / \sqrt{gh \cos \theta}$ le nombre de Froude.